臺北帝國大學理農學部紀要

第二十一巻　第一號

昭和十三年二月

# MEMOIRS
OF THE
# FACULTY OF SCIENCE
AND
# AGRICULTURE

TAIHOKU IMPERIAL UNIVERSITY

Vol. XXI, XXII No. 1.-9

FEBRUARY, 1938 —39

MATUMURA, Sôzi:

Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XXIII)
Über Flächen und Kurven (XIX)

PUBLISHED
BY THE
TAIHOKU IMPERIAL UNIVERSITY
FORMOSA, JAPAN

## PUBLICATION COMMITTEE



The MEMOIRS OF THE FACULTY OF SCIENCE AND AGRICULTURE, Taihoku Imperial University, are published occasionally by the University, which exchanges them with the publications of other learned bodies and institutions throughout the world. Separate series will be sent to individual research institutions, and complete series to the central libraries of universities and larger institutions. Copies of the Memoirs may also be obtained from MARUZEN COMPANY LTD., Tôkyô, Japan, and THE TAIWAN NICHI-NICHI SHIMPÔ-SHA, Taihoku, Formosa, Japan.

All communications regarding the Memoirs should be addressed to the Dean of the Faculty of Science and Agriculture, Taihoku Imperial University, Taihoku, Formosa, Japan.

# 臺北帝國大學理農學部紀要

第二十一卷

昭和十三年

# MEMOIRS
OF THE
# FACULTY OF SCIENCE
AND
# AGRICULTURE
TAIHOKU IMPERIAL UNIVERSITY

Volume XXI.

1938



TAIHOKU IMPERIAL UNIVERSITY
FORMOSA, JAPAN

# CONTENTS

# BEITRÄGE ZUR GEOMETRIE DER KREISE UND KUGELN (XXIII)

Sôzi MATUMURA

(Accepted for publication, February 2, 1938.)

Im folgenden mögen wir einige Sätze über Kreise und Kugeln mitteilen.

## (1)

(**A**) Im folgenden teilen wir über die Kreisgeometrie in der Ebene mit.

Geben wir einen Kreis $\mathfrak{k}$ als die Funktion eines Parameters $t$, so wird dadurch in der Ebene eine Kreisschar bestimmt.

Es seien $\mathfrak{v}$, $\bar{\mathfrak{v}}$ die beiden Schnittpunkte von $\mathfrak{k}$ mit dem Nachbarkreis, die belden Enveloppenpunkte.

Nun mögen wir nur $\mathfrak{v}$ betrachten.

$\mathfrak{F}$ sei in den Polarkoordinaten ($\varphi$=Arcus, $h$=Radiusvektor) durch eine Gleichung

$$h = h(a)$$

gegeben.

Bezeichnen wir die laufenden Polarkoordinaten auf der zum Kurvenpunkt ($\varphi$, $h$) gehörigen Radiusnormalen mit $a$ und $r$, wenn man annimmt, dasz die Radiusnormalen $\mathfrak{v}$ umhüllen, da besteht[1]

$$(1) \qquad \tan(a-\varphi) = \frac{r'(a)}{r(a)} = \frac{h'(\varphi)}{h(\varphi)}.$$

[Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ. Formosa, Japan, Vol. XXI, No. 1 (a) February, 1938.]

(1) DOETSCH, G.: Konvexe Kurven und Fuszpunktkurven, Math. Z. 41, S. 717.

Sind $\eta$ die Kreise, die $r$ in $\mathfrak{v}$ berühren, so folgt

$$(2) \qquad \eta = \cos\psi\cdot\xi + \sin\psi\cdot\xi',$$

wo $\psi$ der Winkel zwischen $\eta$ und $\xi$ ist.

Aus (1) entsteht

$$(3) \qquad \begin{cases}\cos(a-\varphi) = r : \sqrt{r^2+r'^2}, \\ \sin(a-\varphi) = r' : \sqrt{r^2+r'^2}.\end{cases}$$

Somit ist die Gleichung von $\eta$:

$$(4) \qquad \eta = \pm\{r\xi + r'\xi'\} : \sqrt{r^2+r'^2},$$

oder

$$(5) \qquad \eta = \pm\{h\xi + h'\xi'\} : \sqrt{h^2+h'^2},$$

oder

$$(5') \qquad r\eta = \pm\{h\xi + h'\xi\}.$$

In diesem Falle gehen alle Tangenten zu $\eta$ den einen festen Punkt hindurch.

Es zeigt sich, dasz, wenn

$$(6) \qquad r = a\cdot\exp.(ma),$$

(4) mit

$$(7) \qquad \sqrt{1+m^2}\,\eta = \pm\{\xi + m\xi'\}$$

gegeben wird, wo $a$ und $m$ die Konstanten sind.

Wenn (2) einen festen Punkt $\eta_0$ immer hindurchgeht, so folgt

$$(8) \qquad \eta = \pm\{(\xi'\eta_0)\,\xi + (\xi\eta_0)\,\xi'\} : \sqrt{(\xi\eta_0)^2 + (\xi'\eta_0)^2}.$$

**(B)** Ist $\xi$ ein Kreis und $\eta$ ein nicht auf ihm gelegener Kreis, so ist

$$(1) \qquad \begin{cases}\mathfrak{y} = 2\,(\{\cos\psi\cdot\xi + \sin\psi\cdot\xi'\},\ \xi)\,\xi - \{\cos\psi\cdot\xi + \sin\psi\cdot\xi'\} \\ \quad = \cos\psi\cdot\xi - \sin\psi\cdot\xi'\end{cases}$$

der zu $\eta$ in bezug auf den Kreis $\xi$ inverse Kreis.

Weiter besteht

$$(2) \qquad \begin{cases}(\bar{\eta}\mathfrak{y}) = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi \\ \qquad\; = \cos(\varphi+\psi)\,,\end{cases}$$

wo

$$(3) \qquad \bar{\eta} = \cos\varphi\cdot\xi + \sin\varphi\cdot\xi'\,,$$

so kann man sagen, dasz der Winkel zwischen zwei Kreisen $\bar{\eta}$ und $\mathfrak{y}$ zu $\varphi+\psi$ gleich ist.

(C) Wir betrachten

$$(1) \qquad \eta = \cos\psi\cdot\xi + \sin\psi\cdot\xi'$$

und

$$(2) \qquad \bar{\eta} = \cos\psi\cdot\bar{\xi} + \sin\psi\cdot\bar{\xi}'\,.$$

Aus (1), (2) folgt

$$(3) \qquad (\eta\bar{\eta}) = \tfrac{1}{2}\sin 2\psi\,\{(\xi\bar{\xi}') + (\bar{\xi}\xi')\}\,.$$

Sind $\eta$ und $\bar{\eta}$ zueinander senkrecht, so entsteht

$$(4) \qquad \psi = 0$$

oder

$$(5) \qquad (\xi\bar{\xi}') = -(\bar{\xi}\xi')\,.$$

Somit erhalten wir den

**Satz:** *Wenn $\eta$ und $\bar{\eta}$ zueinander senkrecht sind, so folgt*

$$\psi = 0$$

*oder*

$$\cos^2\varphi = \cos^2\lambda$$

*wo $\varphi$ der Winkel zwischen zwei Kreisen $\xi$ und $\bar{\xi}'$, $\lambda$ der zwischen $\bar{\xi}$ und $\xi'$ ist.*

Aus

$$(6) \qquad \eta = \cos\psi\;\xi + \sin\psi\cdot\xi'\,,$$

$$(7) \qquad \bar{\eta} = \cos\varphi\cdot\xi + \sin\varphi\cdot\xi'$$

folgt

(8) $\xi = \{\eta \sin \varphi - \bar{\eta} \sin \psi\} : \sin (\varphi - \psi)$,

(9) $\xi' = \{\eta \cos \varphi - \bar{\eta} \cos \psi\} : \sin (\psi - \varphi)$.

(D) Aus

(1) $\eta = \cos \alpha \cdot \xi + \sin \alpha \cdot \xi'$

folgt

(2) $$\begin{cases} \eta' = -\sin \alpha \ \xi + 2 \cos \alpha \cdot \xi' + \sin \alpha : \xi'' \\ \quad = -\sin \alpha \cdot \xi + 2 \cos \alpha \cdot \xi' + \sin \alpha \{-\xi + \bar{c}\mathfrak{v} + c\bar{\mathfrak{v}}\} \\ \quad = -2 \sin \alpha \cdot \xi + 2 \cos \alpha \cdot \xi' + \bar{c} \sin \alpha \cdot \mathfrak{v} + c \sin \alpha \bar{\mathfrak{v}}. \end{cases}$$

Nach THOMSENS Arbeit[1] ergibt sich

(3) $\eta' = -\sin \alpha \cdot \xi + \cos \alpha \cdot \xi' + c \sin \alpha \bar{\mathfrak{v}}$,

so folgt aus (2)

(4) $-\sin \alpha \cdot \xi + \cos \alpha \ \xi' + \bar{c} \sin \alpha \cdot \mathfrak{v} = 0$.

Ist $\mathfrak{z}$ ein Kreis in $R_2$, so folgt aus (1)

(5) $(\mathfrak{z}\eta) = \cos \psi \cdot (\xi\mathfrak{z}) + \sin \psi \cdot (\xi'\mathfrak{z})$

d. h. $\cos \phi = \cos \psi \cdot \cos \alpha + \sin \psi \cdot \sin \alpha$

oder

(6) $\cos \phi = \cos (\psi - \alpha)$,

wo $\phi$ der Winkel zwischen $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}$, $\alpha$ der zwischen $\xi$ und $\mathfrak{z}$ ist.

Aus (6) kann man wissen, dasz wir

(7) $\alpha + \phi = \psi$

setzen können.

Ist

(8) $\phi = \pi / 2$,

so folgt

(9) $\psi = \alpha$,

(1) THOMSEN, G.: Über konforme Geometrie II, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ. IV Bd., S. 132.

so kann man sagen, dasz, wenn $\mathfrak{z}$ und $\eta$ zueinander senkrecht sind, so die Winkel $\psi$ und $\alpha$ einander gleich sind.

Aus (1) und (1) in (B) ergibt sich

$$(10)\qquad \begin{cases}(\eta\mathfrak{y}) = \cos^2\psi - \sin^2\psi \\ \qquad\;\; = \cos 2\psi ,\end{cases}$$

so ist der Winkel zwischen $\eta$ und $\mathfrak{y}$ $2\psi$ gleich.

(E) Wir betrachten zwei Kreise $\eta$ und $\bar{\eta}$ in $R_2$, wo

$$(1)\qquad \eta = \cos\psi\cdot\xi + \sin\psi\cdot\xi'$$

und

$$(2)\qquad \bar{\eta} = -\sin\psi\cdot\xi + \cos\psi:\xi',$$

so entsteht

$$(3)\qquad (\eta\xi) = \cos\psi,\ (\bar{\eta}\xi') = \cos\psi,\ (\bar{\eta}\eta) = 0 .$$

Somit kann man sagen, dasz $\psi$ der Winkel zwischen $\eta$ und $\xi$ oder der Winkel zwischen $\bar{\eta}$ und $\xi'$ ist, und dasz $\eta$ und $\bar{\eta}$ zueinander senkrecht sind.

Es besteht $(\eta\ddot{\eta}) = 0$, so sind $\eta$ und $\ddot{\eta}$ zueinander senkrecht, wo

$$(4)\qquad \ddot{\eta} = \sin\psi\cdot\xi - \cos\psi\cdot\xi' .$$

Weiter

$$(5)\qquad (\bar{\eta}\ddot{\eta}) = -1,$$

so berühren $\bar{\eta}$ und $\ddot{\eta}$ einander.

Aus (4) kann man wissen, basz

$$(6)\qquad (\xi'\ddot{\eta}) = -\cos\psi,$$

so ist der Winkel zwischen $\xi'$ und $\ddot{\eta}$ $\psi+\pi$ gleich.

$\mathfrak{x}$ in

$$(7)\qquad \mathfrak{x} = \sin\varphi\cdot\xi + \cos\varphi\cdot\xi'$$

bezeichnet einen Kreis in $R_2$.

Aus (7) folgt

$$(8)\qquad (\mathfrak{x}\xi) = \sin\varphi = \cos(\pi/2-\varphi),$$

so kann man den Winkel zwischen $\mathfrak{x}$ und $\xi$ mit $\pi/2-\varphi$ bezeichnen.

(F) Wir betrachten

$$(1) \qquad \eta=\cos\psi\cdot\xi+\sin\psi\cdot\xi'.$$

Berührt ein Kreis $\mathfrak{x}$ $\eta$, so folgt

$$(2) \qquad 1=\cos\psi\cdot(\xi\mathfrak{x})+\sin\psi\,(\xi'\mathfrak{x}).$$

Aus (1) und (2) ergibt sich

$$(3) \qquad \eta=\{\xi+\tan\psi\cdot\xi'\}:\{(\xi\mathfrak{x})+\tan\psi\cdot(\xi'\mathfrak{x})\}$$

d. h.

$$(4) \qquad \begin{cases} \cos\psi=\sqrt{\{1+(\xi'\mathfrak{x})^2-2\,(\xi'\eta)\,(\xi'\mathfrak{x})\}}: \\ \qquad\qquad \sqrt{\{2+(\xi\mathfrak{x})^2+(\xi'\mathfrak{x})^2-2\,(\xi'\mathfrak{x})\,(\xi'\eta)-2\,(\xi\mathfrak{x})\,(\xi\eta)\}}. \\ \sin\psi=\sqrt{\{1+(\xi\mathfrak{x})^2-2\,(\xi\mathfrak{x})\,(\xi\eta)\}}:\sqrt{\{2+(\xi\mathfrak{x})^2+(\xi'\mathfrak{x})^2} \\ \qquad\qquad \overline{-2\,(\xi'\mathfrak{x})\,(\xi'\eta)-2\,(\xi\eta)\,(\xi\mathfrak{x})\}}. \end{cases}$$

Setzen wir (4) in (1) ein, so gilt

$$(5) \qquad \begin{cases} \eta=[\sqrt{\{1+(\xi'\eta)^2-2\,(\xi'\mathfrak{x})\,(\xi'\eta)\}}:\sqrt{\{2+(\xi\mathfrak{x})^2+(\xi'\mathfrak{x})^2} \\ \qquad\qquad \overline{-2\,(\xi'\mathfrak{x})\,(\xi'\eta)-2\,(\xi\mathfrak{x})\,(\xi\eta)\}}]\cdot\xi \\ \quad +[\sqrt{\{1+(\xi\mathfrak{x})^2-2\,(\xi\mathfrak{x})\,(\xi\eta)\}}:\sqrt{\{2+(\xi\mathfrak{x})^2+(\xi'\mathfrak{x})^2} \\ \qquad\qquad \overline{-2\,(\xi'\mathfrak{x})\,(\xi'\eta)-2\,(\xi\eta)\,(\xi\mathfrak{x})}]\cdot\xi'. \end{cases}$$

(5) ist unsere Gleichung für $\eta$.

Aus

$$(6) \qquad \eta=\cos\psi\cdot\xi+\sin\psi\cdot\xi'$$

kann man erhalten:

$$(7) \qquad 2\cos\psi\cdot\eta=2\cos^2\psi\cdot\xi+2\sin\psi\cdot\cos\psi\cdot\xi',$$

d. h.

$$(8) \qquad 2\cos\psi\cdot\eta=(1+\cos2\psi)\cdot\xi+\sin\psi\cdot\xi'$$

oder

$$(9) \qquad 2\cos\psi\cdot\eta=\cos2\psi\cdot\xi+\sin2\psi\cdot\xi'+\xi.$$

Bezeichnen wir

$$(10) \qquad \cos\psi\cdot\xi + \sin\psi\cdot\xi'$$

mit $\eta(\psi)$, so folgt aus (9)

$$(11) \qquad 2\cos\psi\cdot\eta(\psi) = \eta(2\psi) + \xi\,.$$

Aus (11) folgt

$$(12) \qquad (\xi\eta(\psi)) = (\xi\eta(2\psi)) + 1\,,$$

$$(13) \qquad \cos\alpha = \cos\beta + 1\,,$$

so kann man sagen, dasz zwischen $\eta(\psi)$ und $\eta(2\psi)$ (13) besteht, wo $\alpha$ der Winkel zwischen $\xi$ und $\eta(\psi)$, $\beta$ der zwischen $\xi$ und $\eta(2\psi)$ ist.

Aus

$$(14) \qquad \eta = \cos\psi\cdot\xi + \sin\psi\cdot\xi'$$

und

$$(15) \qquad \mathfrak{y} = \{\xi - \xi'\} : \sqrt{2}\,,$$

folgt

$$(16) \qquad \begin{cases} (\eta\mathfrak{y}) = 1/\sqrt{2}\,\cos\psi - 1/\sqrt{2}\,\sin\psi \\ \qquad\;\; = \cos(\pi/4 + \psi)\,, \end{cases}$$

so kann man wissen, dasz der Winkel zwischen zwei Kreisen $\eta$ und $\mathfrak{y}$ $\pi/4+\psi$ gleich ist.

Aus

$$(17) \qquad \eta = \cos\psi\cdot\xi + \sin\psi\cdot\xi'$$

und

$$(18) \qquad \zeta = \{\xi + \xi'\} : \sqrt{2}$$

ist zu erhalten:

$$(19) \qquad \begin{cases} (\eta\zeta) = \{\cos\psi + \sin\psi\} : \sqrt{2} \\ \qquad\;\; = \cos(\pi/4 - \psi)\,. \end{cases}$$

Aus (19) kann man wissen, dasz der Winkel zwischen $\eta$ und $\zeta$ $\pi/4 - \psi$ gleich ist.

Aus

$$(20) \qquad \eta = \cos\psi \cdot \xi + \sin\psi \cdot \xi'$$

folgt

$$(21) \qquad 2\sin\psi \cdot \eta(\psi) = \{\sin 2\psi \cdot \xi - \cos 2\psi \cdot \xi'\} + \xi',$$

also besteht aus (E)

$$(22) \qquad 2\sin\psi \cdot \eta(\psi) = \ddot{\eta}(2\psi) + \xi'.$$

(G) Ist

$$(1) \qquad \bar{\eta} = \cos\varphi \cdot \xi + \sin\varphi \cdot \xi'$$

der zu

$$(2) \qquad \eta = \cos\psi \cdot \xi + \sin\psi \cdot \xi'$$

in buzug auf den Kreis $\xi$ inverse Kreis, so muss

$$(3) \qquad \bar{\eta} = 2(\eta\xi)\xi - \eta$$

sein.

Aus (3) ist zu bekommen:

$$(4) \qquad \cos\varphi \cdot \xi + \sin\varphi \cdot \xi' = 2(\{\cos\psi \cdot \xi + \sin\psi \cdot \xi'\}, \xi)\xi \\ - \{\cos\psi \cdot \xi + \sin\psi \cdot \xi'\},$$

d. h. $$\cos\varphi \cdot \xi + \sin\varphi \cdot \xi' = \cos\psi \cdot \xi - \sin\psi \cdot \xi',$$

oder

$$\xi' = 0,$$

d. h. $$\xi = \text{const.}$$

(H)

$$(1) \qquad \eta = \cos\psi \cdot \xi + \sin\psi \cdot \xi'$$

und

$$(2) \qquad \xi = \cos\psi\,\eta - \sin\psi\,\eta'$$

bestehen.

Aus (1) und (2) ergibt sich

$$(3) \qquad \xi = \cos\psi\,\{\cos\psi\xi + \sin\psi\xi'\} - \sin\psi\,\{-\sin\psi\xi + \cos\psi\xi' \\ + \cos\psi\xi' + \sin\psi\xi''\},$$

oder

$$(4) \qquad \cos\psi\cdot\xi' + \sin\psi\cdot\xi'' = 0$$

Somit besteht (4).

(I) Wir betrachten

$$(1) \qquad \eta = \cos\psi\cdot\xi + \sin\psi\cdot\xi'$$

und

$$(2) \qquad \mathfrak{z} = \cos\psi\cdot\mathfrak{x} + \sin\psi\cdot\mathfrak{x}'.$$

Wenn zwei Kreise $\eta$ und $\mathfrak{z}$ in $R_2$ zueinander senkrecht sind, so folgt

$$(3) \qquad (\eta\mathfrak{z}) = 0 = \cos^2\psi\cdot(\xi\mathfrak{x}) + \sin\psi\cos\psi\,\{(\mathfrak{x}\xi') + (\xi\mathfrak{x}')\} + \sin^2\psi\cdot(\xi'\mathfrak{x}').$$

Aus (3) kann man $tg\psi$ finden:

$$(4) \qquad \tan\psi = [-\{(\mathfrak{x}\xi') + (\xi\mathfrak{x}')\} \pm \sqrt{\{[(\mathfrak{x}\xi') + (\xi\mathfrak{x}')]^2 - 4(\xi'\mathfrak{x}')(\xi\mathfrak{x})\}}] : 2(\mathfrak{x}'\xi').$$

Wenn (3) für alle $\psi$ besteht, so entsteht

$$(5) \qquad (\xi\mathfrak{x}) = 0,\ (\mathfrak{x}\xi') + (\xi\mathfrak{x}') = 0,\ (\xi'\mathfrak{x}') = 0,$$

so folgt aus (5)

$$(6) \qquad (\mathfrak{x}\xi'') + (\xi\mathfrak{x}'') = 0.$$

(J) Wir betrachten

$$(1) \qquad \mathfrak{z} = \cos\varphi\cdot\xi + \sin\varphi\cdot\xi'$$

so folgt

$$(2) \qquad \partial\mathfrak{z}/\partial\varphi = -\sin\varphi\cdot\xi + \cos\varphi\cdot\xi',$$

wo $\mathfrak{z}$ als die Funktion von $\varphi$ anzusehen ist.

Aus (1), (2) ergibt sich

$$(3) \qquad \begin{cases}\cos\varphi\cdot\mathfrak{z} - \sin\varphi\cdot\partial\mathfrak{z}/\partial\varphi = \xi, \\ \sin\varphi\cdot\mathfrak{z} + \cos\varphi\cdot\partial\mathfrak{z}/\partial\varphi = \xi'.\end{cases}$$

Somit kann man wissen, dasz, wenn $\mathfrak{z}$ mit $\xi$ darstellbar ist, so $\xi$ mit $\mathfrak{z}$ auch dargestellt werden kann.

**(K)** Wir betrachten

$$(1) \qquad \eta(\sigma_1) = \cos\psi \cdot \xi(\sigma_1) + \sin\psi \cdot \xi'(\sigma_1),$$

und

$$(2) \qquad \eta(\sigma_2) = \cos\psi \cdot \xi(\sigma_2) + \sin\psi \cdot \xi'(\sigma_2).$$

Aus (1), (2) folgt

$$(3) \qquad \{\eta(\sigma_1) \cdot \eta(\sigma_2)\} = \cos^2\psi \cdot \{\xi(\sigma_1)\,\xi(\sigma_2)\} + \sin\psi \cdot \cos\psi\,\{\xi'(\sigma_1)\,\xi(\sigma_2)\} + \sin\psi\cos\psi\,\{\xi(\sigma_1)\,\xi'(\sigma_2)\} + \sin^2\psi\,\{\xi'(\sigma_1) \cdot \xi'(\sigma_2)\},$$

d. h.

$$(4) \qquad \cos\alpha = \cos^2\psi \cdot \cos\beta + \sin\psi\cos\psi\cos\gamma + \sin\psi\cos\psi\cos\delta + \sin^2\psi \cdot \cos\varepsilon,$$

wo $\alpha$ der Winkel zwischen $\eta(\sigma_1)$ und $\eta(\sigma_2)$, $\beta$ der zwischen $\xi(\sigma_1)$ und $\xi(\sigma_2)$, $\gamma$ der zwischen $\xi'(\sigma_1)$ und $\xi(\sigma_2)$, $\delta$ der zwischen $\xi(\sigma_1)$ und $\xi'(\sigma_2)$, $\varepsilon$ der zwischen $\xi'(\sigma_1)$ und $\xi'(\sigma_2)$, ferner $d\sigma$ der zwischen $\xi$ und $\xi \div a\xi$ ist.

## ( 2 )

**(A)** Sind $\xi(u, v)$ die Kugeln in $R_3$, so bezeichnen $\eta(u, v)$ in

$$(1) \qquad \eta(u, v) = \cos\psi \cdot \xi(u, v) + \sin\psi \cdot \xi'(u, v)$$

die Kugeln, die mit $\xi$ den Winkel $\psi$ bilden, wo $u$, $v$ die Parameter sind.

Allgemein umhüllen die Tangentenebenen zu $(\eta(u, v)$ eine Kegel K.

Ist der Basisradius $r$ und die Höhe $h$ in K, so entsteht aus (1)

$$(2) \qquad \eta = \pm\,\{r\xi + h\xi'\} : \sqrt{h^2 + r^2}.$$

**(B)** Wir betrachten den Kugelbüschel

$$(1) \qquad \xi^\alpha,\ \mathfrak{z}^\beta \quad [\alpha, \beta = \mathrm{I}, \mathrm{II}]$$

wofür

$$(2) \qquad \eta^\alpha = \cos\psi \cdot \xi^\alpha + \sin\psi \cdot \{\xi^\alpha\}'.$$

und

$$(3) \qquad \mathfrak{y}^{\beta} = \cos\psi \cdot \mathfrak{x}^{\beta} + \sin\psi \cdot \{\mathfrak{x}^{\beta}\}'$$

bestehen.

Aus (2) und (3) ergibt sich

$$(4) \qquad p\eta^{\alpha} + q\mathfrak{y}^{\beta} = \cos\psi \cdot \{p\xi^{\alpha} + q\mathfrak{x}^{\beta}\} + \sin\psi\,\{p\xi^{\alpha} + q\mathfrak{x}^{\beta}\}',$$

wo $p$, $q$ die skalaren Grössen sind.

(4) zeigt, dasz (2) für die Kugelbüschel von den Kugelbüscheln besteht.

(C) ${}_{(i)}\eta$ in

$$ {}_{(i)}\eta = \cos {}_{(i)}\alpha \cdot {}_{(i)}\xi + \sin {}_{(i)}\alpha \cdot {}_{(i)}\xi'$$

bezeichnet die Kugel in $R_N$.

Der Winkel zwischen ${}_{(i)}\xi$ und ${}_{(i)}\eta$ ist ${}_{(i)}\alpha$ gleich, wo ${}_{(i)}\xi$ die Kugel in $R_N$ ist.

$$\mathfrak{z} = \sum_{1}^{N-1} (\text{const.} \cos {}_{(i)}\alpha \cdot {}_{(i)}\xi + \text{const.} \sin {}_{(i)}\alpha \cdot {}_{(i)}\xi')$$

bezeichnet die Kugeln, die den Schnittpunkt von (N−1) Kugeln

$${}_{(i)}\eta, \ (i = 1, 2, \ldots, N-1)$$

hindurchgehen.

## ( 3 )

(A) $\mathfrak{z}$ in

$$(1) \qquad \mathfrak{z} = \mathfrak{x} + \varepsilon\mathfrak{x}'$$

bezeichnet den Kreis in $R_2$. $\varepsilon$ hier ist in BLASCHKES Buch[1] klar gemacht und $\mathfrak{x}$ der Kreis in $R_2$.

Aus (1) folgt

$$(2) \qquad (\mathfrak{z}\mathfrak{x}') = \varepsilon,$$

d. h. $(3) \qquad \sin\phi = \varepsilon,$

(1) BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie, 1, (1930), S. 262.

wo $\phi$ der Winkel zwischen $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{x}$ ist.

$\mathfrak{y}$ in

$$(4) \qquad \mathfrak{y} = \mathfrak{x} - \varepsilon\mathfrak{x}'$$

bezeichnet den Kreis in $R_2$.

Aus (1), (4) entsteht

$$(5) \qquad (\mathfrak{z}\mathfrak{x}) = 1,$$

so berühren $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{y}$ einander.

$\eta$ in

$$(6) \qquad \eta = \{\mathfrak{x} + \varepsilon\mathfrak{x}' + i\mathfrak{x}''\} : \sqrt{2i}$$

bezeichnet den Kreis in $R_2$, wo $i = \sqrt{-1}$.

Aus (1), (6) folgt

$$(7) \qquad (\mathfrak{z}\eta) = (1+i) : \sqrt{2i},$$

$$(8) \qquad \cos\varphi = (1+i) : \sqrt{2i},$$

wo $\varphi$ der Winkel zwischen $\mathfrak{z}$ und $\eta$ ist.

Aus (4), (6) ist zu erhalten:

$$(9) \qquad (\mathfrak{y}\eta) = (1+i) : \sqrt{2i},$$

oder

$$(10) \qquad \cos\psi = (1+i) : \sqrt{2i},$$

wo $\psi$ der Winkel zwischen $\mathfrak{y}$ und $\eta$ ist.

Aus (8) und (10) ergibt sich

$$(11) \qquad \cos\varphi = \cos\psi.$$

**(B)** Wenn $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ zwei Kreise in $R_2$ darstellen, so bezeichnen

$$(1) \qquad \mathfrak{z} = \alpha\mathfrak{x} + \beta\mathfrak{y}, \quad (\alpha, \beta \text{ Parameter})$$

die Kreisbüschel in $R_2$.

Wenn (1) die Punkte bezeichnen, so folgt

$$(2) \qquad \alpha^2(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) + 2\alpha\beta(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) + \beta^2(\mathfrak{y}\mathfrak{y}) = 0.$$

Die Invariante K des Komplexes wird zu

$$(3) \qquad \mathrm{K} = \frac{(\mathfrak{x}\mathfrak{y})^2}{(\mathfrak{x}\mathfrak{x})(\mathfrak{y}\mathfrak{y})} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}\,\frac{(\mathfrak{x}\mathfrak{x})^2}{(\mathfrak{x}\mathfrak{y})^2} = \frac{\alpha^2}{\beta^2(\mathfrak{x}\mathfrak{y})^2}$$

in dem Falle (2).

Wenn die elliptischen Komplexe $\mathfrak{x}$, die zu dem absoluten Komplex $\mathfrak{y}$ involutorisch sind, mit

$$(4) \qquad (\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = 0$$

identisch sind, so folgt aus

$$(5) \qquad 1/\mathrm{K} = 0 .$$

**(C)** Es seien die drei Kugeln

$$(1) \qquad {}_{(i)}\mathfrak{x}\,,\ {}_{(i)}\mathfrak{y}\,,\ {}_{(i)}\mathfrak{z}$$

in $R_3$ gegeben, so bezeichnet

$$(2) \qquad {}_{(i)}\mathfrak{v} = {}_{(i)}\lambda\,{}_{(i)}\mathfrak{x} + {}_{(i)}\mu\,{}_{(i)}\mathfrak{y} + {}_{(i)}\nu\,{}_{(i)}\mathfrak{z}\,, \quad (i = 1, 2)$$

die Kugelbüschel, die durch die zwei Schnittpunkte gehen, wo ${}_{(i)}\lambda$, ${}_{(i)}\mu$, ${}_{(i)}\nu$ die skalaren Gröszen sind.

Wir betrachten

$$(3) \qquad \cos\{{}_{(1)}\mathfrak{v}\,{}_{(2)}\mathfrak{v}\}\,,$$

so besteht

$$(4) \qquad \cos\{{}_{(1)}\mathfrak{v}\,{}_{(2)}\mathfrak{v}\} = {}_{(1)}\lambda\,{}_{(2)}\lambda + {}_{(1)}\mu\,{}_{(2)}\mu + {}_{(1)}\nu\,{}_{(2)}\nu\,,$$

wo

$$(5) \qquad \begin{cases} {}_{(1)}\mathfrak{x} \perp {}_{(2)}\mathfrak{y}\,, & {}_{(1)}\mathfrak{x} \perp {}_{(2)}\mathfrak{z}\,, \quad ({}_{(1)}\mathfrak{x}\,{}_{(2)}\mathfrak{x}) = 1\,, \\ {}_{(1)}\mathfrak{y} \perp {}_{(2)}\mathfrak{z}\,, & {}_{(1)}\mathfrak{y} \perp {}_{(2)}\mathfrak{x}\,, \quad ({}_{(1)}\mathfrak{y}\,{}_{(2)}\mathfrak{y}) = 1\,, \\ {}_{(1)}\mathfrak{z} \perp {}_{(2)}\mathfrak{x}\,, & {}_{(1)}\mathfrak{z} \perp {}_{(2)}\mathfrak{y}\,, \quad ({}_{(1)}\mathfrak{z}\,{}_{(2)}\mathfrak{z}) = 1 \end{cases}$$

sind.

**(D)** Im allgemeinen betrachten wir

$$(1) \qquad \eta = \cos{}_{(1)}\lambda \cdot {}_{(1)}\mathfrak{x} + \cos{}_{(2)}\lambda \cdot {}_{(2)}\mathfrak{x} + \dots + \cos{}_{(n)}\lambda \cdot {}_{(n)}\mathfrak{x}\,,$$

so folgt

$$(2) \qquad ({}_{(i)}\mathfrak{x}\,\eta) = \cos{}_{(i)}\lambda\,,$$

d. h.

$$(3)\qquad {}_{(i)}\phi = {}_{(i)}\lambda\,,$$

wo ${}_{(i)}\phi$ die Kugeln in $R_3$ sind, ${}_{(i)}\phi$ der Winkel zwischen zwei Kugeln $\eta$ und ${}_{(i)}\mathfrak{x}$ in $R_3$, ferner

$${}_{(i)}\mathfrak{x} \perp {}_{(j)}\mathfrak{x}\,, \quad (i \neq j)$$

und endlich ${}_{(i)}\lambda$ die skalaren Grōszen.

( 4 )

(**A**) Betrachten wir jetzt die Transformation:

$$(1)\qquad \mathfrak{x}^*(t,\tau) = \text{const.}\ \mathfrak{x}(t,\tau)\,,$$

wo $\mathfrak{x}^*$ und $\mathfrak{x}$ die Kreisflächen sind.

Im folgenden wollen wir die den neuen Koordinaten entsprechenden Grössen mit Sternen bezeichnen.

Bei der Transformation (1) haben wir

$$(2)\qquad \frac{(\theta_t\theta_t)^*}{(\theta_t\theta_t)} = \frac{(\theta_t\theta_\tau)^*}{(\theta_t\theta_\tau)} = \frac{(\theta_\tau\theta_\tau)^*}{(\theta_\tau\theta_\tau)}\,,$$

wo $(\theta_t\theta_t)^*$, $(\theta_t\theta_\tau)^*$, $(\theta_\tau\theta_\tau)^*$; $(\theta_t\theta_t)$, $(\theta_t\theta_\tau)$, $(\theta_\tau\theta_\tau)$ unsere Fundamentalgrössen von $\mathfrak{x}^*$ bzw. $\mathfrak{x}$ sind.

Die Minimallinien

$$(3)\qquad (\theta_t\theta_t)\,dt^2 + 2\,(\theta_t\theta_\tau)\,dt d\tau + (\theta_\tau\theta_\tau)\,d\tau^2 = 0$$

auf $\mathfrak{x}$ transformieren sich in die Minimallinien

$$(4)\qquad (\theta_t\theta_t)^*\,dt^2 + 2\,(\theta_t\theta_\tau)^*\,dt d\tau + (\theta_\tau\theta_\tau)^*\,d\tau^2 = 0$$

auf $\mathfrak{x}$.*

(**B**) In den beiden Punkten $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ auf den Kreisflächen gibt es je eine Involution von orthogonalen Linienelementen.

Das gemeinsame Paar in diesen beiden Involutionen kann man im Punkte $\mathfrak{x}$ sowie im Punkte $\bar{\mathfrak{x}}$ begreifen und sie sind durch

$$\begin{vmatrix} dt^2 & -dt d\tau & d\tau^2 \\ (\theta_\tau\theta_\tau) & (\theta_t\theta_\tau) & (\theta_t\theta_t) \\ (\bar\theta_\tau\bar\theta_\tau) & (\bar\theta_t\bar\theta_\tau) & (\bar\theta_t\bar\theta_t) \end{vmatrix} = 0$$

gegeben.

Die entsprechenden Integralkurven wollen wir die Hauptorthogonalkurven nennen.

(C) Die Gleichung der Minimallinien auf einer Kreisfläche $(k)$

$$(1) \qquad (\theta_t\theta_t)\, dt^2 + 2\,(\theta_t\theta_\tau)\, dt d\tau + (\theta_\tau\theta_\tau)\, d\tau^2 = 0, \; (\theta_\tau\theta_\tau) = 0\,.$$

(1) hat im Punkte $(t, \tau)$ zwei Tangenten $j_1$ und $j_2$, die dort mit den beiden Tangenten $k_\tau$ und $k_t$ der Parameterlinien $(\tau)$ und $(t)$ zwei Doppelverhältnisse $(j_1j_2k_\tau k_t)$ und $(j_2j_1k_\tau k_t)$ bilden, und diese beiden Doppelverhältnisse sind die Wurzeln $\Delta$ der Gleichung[1]

$$(2) \qquad (\theta_t\theta_t)\,\Delta^2 - 2\,\{2\,(\theta_t\theta_\tau)^2 - (\theta_t\theta_t)\}\,\Delta + (\theta_t\theta_t) = 0\,.$$

Aus (2) folgt

$$(3) \qquad \Delta = \frac{2\,(\theta_t\theta_\tau)^2 - (\theta_t\theta_t)}{(\theta_t\theta_t)} \pm \frac{2\,(\theta_t\theta_\tau)}{(\theta_t\theta_t)} \sqrt{(\theta_t\theta_\tau)^2 - (\theta_t\theta_t)}\,.$$

Wenn

$$(4) \qquad (\theta_t\theta_\tau) = (\theta_t\theta_t)\,,$$

so folgt

$$(5) \qquad \Delta = (\theta_t\theta_\tau)^2 : (\theta_t\theta_t)\,,$$

wenn

$$(6) \qquad (\theta_t\theta_\tau) = 0\,,$$

so folgt

$$(7) \qquad \Delta = -1\,.$$

Wenn

$$(8) \qquad -(\theta_t\theta_t) = (\theta_t\theta_\tau)^2$$

(1) SCHEFFERS, G.: Theorie der Flächen, S. 51.

in (5), so folgt

$$(9) \qquad \Delta = 1.$$

Aus (9) kann man wissen, dasz $k_\tau$ und $k_t$ das Tangentenpaar $j_1$ und $j_2$ voneinander harmonisch trennen.

Wir setzen

$$(10) \qquad (\theta_t \theta_t) = 1.$$

Wenn (10) in (3) besteht, so folgt

$$(11) \qquad \Delta = 2\,B^2 - 1 \pm 2\,B\sqrt{B^2-1}.$$

Besteht

$$(\theta_t \theta_t) = (\theta_t \theta_\tau)^2,$$

so sind die Tangentenflächen von den Kurven (1) die nichtzyklindrischen Kegel von den Minimalgeraden und auch die Minimalebenen.(1)

Wenn in (2)

$$(12) \qquad (\theta_t \theta_t) = 0,$$

so ist der Wert von $|\Delta|$

$$\infty$$

gleich.

## ( 5 )

(**A**) Es seien $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ zwei Kugeln in $R_n$, so folgt

$$(1) \qquad \delta\mathfrak{x} \cdot d\mathfrak{y} = H_{hk}\delta u^k du^k = 0,$$

wenn $\delta\mathfrak{x}$ und $d\mathfrak{y}$ zueinander senkrecht sind.

*Wenn die Parameterkurven zueinander konjugiert sind, dann gilt*

$$H_{12} = 0.$$

Die zwei Richtungen $du^1 : du^2$ und $\delta u^1 : \delta u^2$ sind zueinander konjugiert:

(1) SCHEFFERS, G., a. a. O. S., 31.

$$(2)\qquad \begin{cases} H_{hk}du^h\delta u^k = 0\,, \\ \overline{H}_{hk}du^h\delta u^k = 0 \end{cases}$$

sind durch

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} (du^1)^2 & -du^1du^2 & (du^2)^2 \\ H_{22} & H_{12} & H_{11} \\ \overline{H}_{22} & \overline{H}_{12} & \overline{H}_{11} \end{vmatrix} = 0$$

gegeben.

In dem Falle folgt aus (1)

$$(4)\qquad \begin{aligned}(\mathfrak{x}_u\delta u + \mathfrak{x}_v\delta v\,,\ \mathfrak{x}_u du + \mathfrak{y}_v dv) \\ = \mathrm{L}\, du\delta u + \mathrm{M}\, du\delta v + \mathrm{M}'\, dv\delta u + \mathrm{N}\, dv\delta v = 0\,.\end{aligned}$$

wo

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathrm{L} = (\mathfrak{x}_u\mathfrak{y}_u)\,, \\ \mathrm{M} = (\mathfrak{y}_u\mathfrak{x}_v)\,, \\ \mathrm{M}' = (\mathfrak{x}_u\mathfrak{y}_v)\,, \\ \mathrm{N} = (\mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_v) \end{cases}$$

sind.

Wenn $\mathfrak{y}_u\mathfrak{x}_v = \mathfrak{y}_v\mathfrak{x}_u$, so folgt aus (4)

$$(6)\qquad \mathrm{L}\, du\delta u + \mathrm{M}(du\delta v + dv\delta u) + \mathrm{N}\, dv\delta v = 0\,.$$

In dem Falle (6) ist (7) $\mathrm{M} = 0$ die Bedingung dafür, dasz (1) für die Parameterlinien besteht.

**(B)** Wir betrachten zwei Kugeln $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ in $\mathrm{R}_n$, wo

$$(1)\qquad \left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial u_\alpha}\,\mathfrak{y}\right) = \text{const.}$$

besteht.

Aus (1) folgt

$$(2)\qquad \frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial u_\alpha \partial u_\beta}\,\mathfrak{y} = -\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial u_\alpha}\,\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial u_\beta} = b_{\alpha\beta}\,,$$

wo $b_{\alpha\beta}$ die neuen Fundamentalgröszen und $u_\alpha$, $u_\beta$ die Parameter sind.

Nun betrachten wir

$$(3) \qquad \frac{1}{R} \equiv \frac{b_{\alpha\beta}du_\alpha du_\beta}{g_{\alpha\beta}du_\alpha du_\beta},$$

wo

$$(4) \qquad \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u_\alpha}\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u_\beta} = g_{\alpha\beta}$$

sind.

Aus (3) folgt[1]

$$(5) \qquad \frac{1}{R^2} - b_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}\frac{1}{R} + \frac{b}{g} = 0,$$

$$(6) \qquad H = \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}b^\alpha_\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{'R} + \frac{1}{''R}\right),$$

$$(7) \qquad K = \frac{1}{'R''R} = \frac{b}{g} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{\gamma\delta}b_{\alpha\gamma}b_{\beta\delta},$$

$$(8) \qquad \begin{cases} \varepsilon^{\alpha\beta}b_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}\,du_\gamma\,du_\delta = 0, \\ \left(\text{für die Richtungen von } \frac{1}{'R}, \frac{1}{''R}\right), \end{cases}$$

$$(9) \qquad \begin{cases} \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial u_\beta} = -b^\alpha_\beta\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u_\alpha}, \\ \left(\text{für } \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial u_\beta} = p^{\cdot\lambda}_{\beta}\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u_\lambda}\right), \end{cases}$$

wo $\frac{1}{'R}$, $\frac{1}{''R}$ der Maximum-oder Minimumwert von $\frac{1}{R}$ sind.

Weiter setzen wir

$$(10) \qquad \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial u_\alpha}\cdot\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial u_\beta} = c_{\alpha\beta},$$

so folgt[2] aus (2), (4), (10)

(1) DUSCHEK-MAYER: Lehrbuch der Differentialgeo., 1, (1930) S. 127.

(2) Vergl. NAKAZIMA, S.: Differentialgeo. der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ., Vol. 34, p. 191, (4).

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u_\alpha}\dfrac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u_\beta} = g_{\alpha\beta}\,, \\[2ex] -\dfrac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u_\alpha}\dfrac{\partial \mathfrak{y}}{\partial u_\beta} = b_{\alpha\beta}\,, \\[2ex] \dfrac{\partial \mathfrak{y}}{\partial u_\alpha}\dfrac{\partial \mathfrak{y}}{\partial u_\beta} = c_{\alpha\beta}\,, \end{cases}$$

wo

$$(12)\qquad \begin{cases} c_{\alpha\beta} = g_{ik}\, b^i_\alpha\, b^k_\beta = g^{\lambda\mu}\, b_{\alpha\lambda}\, b_{\beta\mu} = b^\mu_\alpha\, b_{\alpha\mu}\,, \\ c = b^2/g \end{cases}$$

bestehen.

Wenn $\partial\mathfrak{x}$ und $d\mathfrak{y}$ zueinander senkrecht sind, so folgt

$$(13)\qquad \partial\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} = -\, b_{\alpha\beta}\, \partial u_\alpha\, du_\beta = 0\,.$$

(C) Wir haben[1]

$$(1)\qquad \tan\theta = \sqrt{\frac{(\theta_\tau\theta_\tau)}{(\theta_t\theta_t)}}\cdot\frac{d\tau}{dt}\,,$$

$$(2)\qquad \tan\theta' = \sqrt{\frac{(\theta'_\tau\theta_\tau)}{(\theta_t\theta_t)}}\cdot\frac{\partial\tau}{\partial t}\,.$$

Aus (1), (2) entsteht

$$(3)\qquad \tan\theta\cdot\tan\theta' = \frac{(\theta_\tau\theta_\tau)\, dt\, \partial\tau}{(\theta_t\theta_t)\, dt\, \partial t}\,.$$

Nun setzen wir

$$(4)\qquad \frac{(\theta_\tau\theta_\tau)\, dt\, \partial\tau}{(\theta_t\theta_t)\, dt\, \delta\tau} = \frac{d\mathrm{U}\, \partial\mathrm{U}}{d\Sigma\, \partial\Sigma}\,,$$

so folgt

$$(5)\qquad \tan\theta\cdot\tan\theta' = \frac{d\mathrm{U}}{d\Sigma}\cdot\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial\Sigma}\,,$$

wo

(1) MATUMURA, S.: Beiträge zur Ceo. der Kreise und Kugeln (XVIII), Mem. of the Fac. of Sci. aud Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. XVIII. p. 197.

$$(6)\qquad \begin{cases} (\theta_\tau \theta_\tau)\, dt\, \partial\tau = dU \cdot \partial U \\ (\theta_t \theta_t)\, dt\, \partial t = d\Sigma \cdot \partial\Sigma \end{cases}$$

sind.

Aus (5) kann man erweitern wie üblich.

Dabei sind U und $\Sigma$ die neuen Parameter.

# ÜBER FLÄCHEN UND KURVEN (XIX)

Sôzi MATUMURA

(Accepted for publication, February 2, 1938.)

Im folgenden mögen wir einige Bemerkungen über die Flächen und Kurven mitteilen.

## ( 1 )

M sei ein veränderlicher Punkt auf einer ebenen Kurve und $\varphi$ Deviation. Wenn nun ein Kegelschnitt $\Gamma$, der die Kurve in der dritten Ordnung berührt, auf der Normalen einen Abschnitt $\lambda$ bestimmt, so dasz für alle Kurvenpunkte die Beziehung

$$\frac{2}{\lambda} = \frac{a}{\rho^{3}\sqrt{\frac{1}{3}\int \tan\varphi \, ds}} - \frac{1}{\frac{1}{3}\int \tan\varphi \, ds}$$

mit konstantem $a$ besteht, dann fällt die Berührungssehne von $\Gamma$ mit den beiden Zweigen über Enveloppe mit der Normalen zusammen.[1]

## ( 2 )

Nach HIRAKAWA lauten BOUQUETS Formeln in R.-Geometrie[2]

$$(1) \qquad x(S) = \frac{1}{q} S - \frac{1}{6q^4 \rho_0 \rho^2} S^3 + \cdots ,$$

$$(2) \qquad y(S) = \frac{e}{2q^3 \rho_0 \rho} S^2 + \frac{1}{6} \left\{ \frac{d}{dS} \left( \frac{1}{q^3 \rho_0 \rho} \right) \right\} e S^3 + \cdots .$$

---

[Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ. Formosa, Japan, Vol. XXI, No. 1 (b), February, 1938.]

(1) GOORMAGHTIGH, R.: Sur les coniques qui ont un contact du troisième ordre avec une courbe plane, Mathesis 45, 302-305.

(2) HIRAKAWA, J.: The Euclidean Relative Differential Geometry, 1, Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan, Vol. 17 (1935), p. 522.

Aus (1) ergibt sich

$$(3) \qquad S = qx + \frac{1}{6q\rho_0\rho^2}x^3 + \cdots.$$

Setzen wir (3) in (2), so folgt

$$(4) \qquad y = \frac{e}{2q\rho_0\rho}x^2 + \frac{1}{6}\left\{\frac{d}{dS}\left(\frac{1}{q^3\rho_0\rho}\right)\right\}eq^3x^3 + \frac{e}{12q^2\rho_0^2\rho^3}x^4 + \cdots.$$

(4) ist die kanonische Darstellung in R.-Geometrie.

## ( 3 )

Ist $d$ der R.-Abstand,(1) so folgt

$$(1) \qquad d = \sqrt{q_1q_2(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2)^2}$$

oder

$$(2) \qquad d = \varepsilon q_{12}(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2)$$

wo $\varepsilon = \pm 1$, $q_{12}^2 = q_1q_2$ sind.

Aus (1) ergibt sich

$$(3) \qquad \frac{q_1(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2)}{d} = \frac{d}{q_2(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2)}.$$

## ( 4 )

Ist $d = \text{const.}$ in (3), so folgt

$$(1) \qquad \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2 = \pm\frac{\text{const.}}{\sqrt{q_1q_2}},$$

daraus ergibt sich

$$(2) \qquad f = \frac{1}{2}\sin w\left(\frac{\text{const.}}{\sqrt{q(z)q(x)}}, \frac{\text{const.}}{\sqrt{q(y)q(x)}}\right),$$

wo $f$ den Fiächeninhalt bedeutet.(2)

(1) HIRAKAWA, J.: The Euclidean Relative Differential Geometry, 1, Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan, Vol. 17 (1935), p. 513.

(2) OKADA, TAKAMI, KOZIMA: Affine Geo. Iwanamikôza, p. 4.

## ( 5 )

Wir betrachten eine Eilinie E in $R_2$, so kann man einen gleichseitigen Dreieck D im Sinne in der gewhönlichen Geometrie in E innen-inschreiben, wo D der gleichzeitig gleichseitige Dreieck im Sinne in der relativen Geometrie[1] ist.

## ( 6 )

Wir betrachten ein Problem, alle analytischen Kurven in $R_2$ zu finden, deren Sehnen $\overline{PQ}$ dem Bogen $\widehat{PQ}$ gleich sind,[2] d. h. es handelt sich also um die Bestimmung aller Kurven $\mathfrak{x}(t)$, die der Beziehung

$$(1) \qquad (\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2)^2 = \{\int_P^Q \sqrt{\mathfrak{x}'^2}\, dt\}^2$$

genügen.

Aus (1) folgt[3]

$$2(\mathfrak{x}_1' - \mathfrak{x}_2' k)(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2) = 2\{\int_P^Q \sqrt{\mathfrak{x}'^2}\, dt\}\{\sqrt{\mathfrak{x}_1'^2} - \sqrt{\mathfrak{x}_2'^2}\, k\}$$

d. h.

$$(2) \qquad \mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_2,$$

so müssen P und Q miteinander zusammenfallen,[4] wenn unsere Kurven die reellen sind.

Wenn

$$(3) \qquad (\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2)^2 = \int_P^Q \mathfrak{x}'^2\, dt,$$

so entsteht

$$\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_1'^2 - \mathfrak{x}_2'^2 k^2 = (\mathfrak{x}_1' + \mathfrak{x}_2' k)(k\mathfrak{x}_1' - \mathfrak{x}_2' k),$$

d. h. $\qquad \mathfrak{x}_1' = \mathfrak{x}_2' k,$

dies ist nicht anders als (2).

---

(1) Vergl. meiner Arbeit in Siziô Sûgaku Danwakai, Osaka Imp. Univ. No. 139 (1937).

(2) FELD, J. M.: Analytic curves for which the chord equals the arc, Amer. Math. Monthly 41, p. 543.

(3) GERICKE, H.: Einige kennzeichende Eigenschaften des Kreises, Marh. Zeit. 40, S. 419.

(4) MUTUMURA, S.: Über Flächen und Kurven (XVII), Mem. of the Fac. of Sci. and Agr. Taihoku Imp. Univ., Vol. XVIII, S. 133.

( 7 )

DOETSCH beweist[1] die folgende Relation

$$(1)\qquad \frac{r'(a)}{r(a)} = \frac{h'(\varphi)}{h(\varphi)}.$$

Wir können (1) leicht beweisen, denn

$$(2)\qquad \tan(a-\varphi) = \frac{h'(\varphi)}{h(\varphi)}.$$

Aus der elementaren Differential-und Integralrechnung[2] entsteht

$$(3)\qquad \tan(a-\varphi) = \frac{r'(a)}{r(a)}.$$

Aus (2) und (3) hat man (1) zur Folge.

(1) DOETSCH, G.: Konvexe Kurven und Fuszpunktkurven, Math. Z. 41 (1936). S 718.

(2) Vergl. etwa SAKAI: Lehrbuch der Differential-und Integralrechnung, S. 161.

# ON A PAIR OF SURFACES MUTUALLY RELATED, (VII)

Sôzi MATUMURA

(Accepted for publication, April 23, 1938.)

In this paper I shall investigate the surfaces $\mathfrak{x}$, which satisfy

$$\text{(A)} \qquad \lambda\mathfrak{x}_{uv} + \sigma\mathfrak{x}_u + \mathfrak{x}_v = 0.$$

## ( 1 )

When $\sigma \neq 0$, $\lambda = 0$ in (A), then

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} \sigma^2 E + G + 2\sigma F = 0, \\ \sigma E + F = 0, \\ G + \sigma F = 0. \end{cases}$$

From (1) it follows

$$\text{(2)} \qquad \sigma = 0, \quad G = 0,$$

or

$$\text{(3)} \qquad G = \sigma^2 E,$$

so in the equation of minimal curves on $\mathfrak{x}$ we get[1]

$$\text{(4)} \qquad u = \text{const.},$$

or

$$\text{(5)} \qquad E du^2 + 2F du dv - F\sigma^2 dv^2 = 0.$$

[Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ. Formosa, Japan, Vol. XXI, No. 2, May, 1938.]

(1) EISENHART, L. P.: Differentialgeo. p. 81.

## ( 2 )

Suppose that we are given A-surface S, and referred to their lines of curvature. Denoting W the distance from the origin upon the tangent plane at a corresponding point, we have it that W is a particular solution of the equation[1]

$$(1)\qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}=\frac{\partial \log\sin w}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}+\frac{\partial\log\cos w}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}.$$

Denote T is the pedal surface of S, i. e., the locus of the end point of W, then we get the following theorems: –

**Theorem 1:** *In order that* $T_1$ *be a curve, it follows that*

$$(2)\qquad -\frac{\partial}{\partial v}\left\{1\Big/\frac{\partial\log\cos w}{\partial u}\right\}=\frac{\partial\log\sin w}{\partial v}:\frac{\partial\log\cos w}{\partial u};$$

*In like manner with the condition that* $T_{-1}$ *be a curve it follows that*

$$(3)\qquad -\frac{\partial}{\partial u}\left\{1\Big/\frac{\partial\log\sin w}{\partial v}\right\}=\frac{\partial\log\cos w}{\partial u}:\frac{\partial\log\sin w}{\partial v},$$

*where*

$$\cdots\ T_{-2},\ T_{-1},\ T,\ T_1,\ T_2,\ \cdots$$

*are derived congruences by* DARBOUX.

**Theorem 2:** *The necessary and aufficient condition that* $v=$const. *on* T *are the contact curves of the enveloping cylinder or enveloping cones of* T *is*

$$(4)\qquad \log\sin w=U,$$

*or*

$$(5)\qquad \frac{\partial\log\sin w}{\partial v}\cdot\frac{\partial\log\cos w}{\partial u}=-\frac{\partial^2\log\sin w}{\partial u\partial v},$$

*where* U *is the function of* $u$ *alone.*

---

(1) EISENHART, L. P.: Surfaces with the Same Spherical Representation of their Lines of Curnature as Pseudo-Spherical surfaces, American Journ. of Math. XXVII, p. 113.

**Theorem 3:** *When* $\frac{\partial \log \sin w}{\partial v}$ *and* $\frac{\partial \log \cos w}{\partial u}$ *are both zero,* T *is a surface of translation.*

The condition that the point equation of T may have equal invariants is

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 \log \sin w}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \log \cos w}{\partial u \partial v}.$$

Hence if the tangents to the curves $v$=const. are to form a congruence of RIBAUCOUR we must have

$$(7) \qquad \frac{\partial \log \cos w}{\partial u} = UV.$$

When the conjugate system on T is composed of the lines of curvature, $\frac{\partial \log \sin w}{\partial v}$ and $\frac{\partial \log \cos w}{\partial u}$ are have the expressions

$$(8) \qquad \frac{\partial \log \sin w}{\partial v} = \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v}, \quad \frac{\partial \log \cos w}{\partial u} = \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u}.$$

The necessary and sufficient condition that the tangents to the lines of curvature $v$=const. an T form a congruence of RIBOUCOUR, when T is an isothermic surface, is[1]

$$(9) \qquad \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \left( \frac{\partial \log \cos w}{\partial u} \right) = 0.$$

The tangents to the curves $v$=const. on T form a congruence of GUICHARD, when

$$(10) \qquad \frac{\partial}{\partial u} \log \left\{ -\frac{\partial \log \cos w}{\partial u} \right\} + \frac{\partial \log \cos w}{\partial u} - \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial u} = 0,$$

when E, F, G are first fundamental quantities of T.

In order that $T_1$ be a curve, the coördinates of $T_1$ must be functions of $u$ alone.

From this it follows that the condition for this is

(1) MATUMURA, S.: On a pair of surfaces mutually related (V), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri. Taihoku Imp. Univ. Vol. XVIII, p. 120.

$$(11)\qquad -\frac{\partial}{\partial v}\left\{1\Big/\frac{\partial\log\cos w}{\partial u}\right\}=\frac{\partial\log\sin w}{\partial v}\Big/\frac{\partial\log\cos w}{\partial u}$$

In like manner the condition that $T_{-1}$ be a curve is

$$(12)\qquad -\frac{\partial}{\partial u}\left\{1\Big/\frac{\partial\log\sin w}{\partial v}\right\}=\frac{\partial\log\cos w}{\partial u}\Big/\frac{\partial\log\sin w}{\partial v}$$

## ( 3 )

Let $\phi$ be any function of two variables $u$ and $v$; if $z$ denotes any solution of the equation

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi/\partial u\partial v}{\partial\phi/\partial u}\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi/\partial u\partial v}{\partial\phi/\partial v}\frac{\partial z}{\partial v}=0$$

the formulae

$$(2)\qquad x+iy=\phi,\ x-iy=-\int\frac{(\partial z/\partial u)^2}{\partial\phi/\partial u}du+\frac{(\partial z/\partial v)^2}{\partial\phi/\partial v}dv,\ z=z\,,$$

give the cartesian coördinates $x$, $y$, $z$ of a surface for which the parametric lines are of length zero; and the square(1) of the linear element is

$$(3)\qquad ds^2=-\frac{(\partial z/\partial u\cdot\partial\phi/\partial v-\partial\phi/\partial v\cdot\partial\phi/\partial u)^2}{\partial\phi/\partial u\cdot\partial\phi/\partial v}dudv\,.$$

In this case, we have

$$(4)\qquad \begin{cases} E=0,\quad F=-\dfrac{1}{2}\dfrac{(\partial z/\partial u\cdot\partial\phi/\partial v-\partial z/\partial v\cdot\partial\phi/\partial u)^2}{\partial\phi/\partial u\cdot\partial\phi/\partial v},\quad G=0;\\[2ex] D^2=\dfrac{(\partial^2\phi/\partial u^2\cdot\partial z/\partial u-\partial\phi/\partial u\cdot\partial^2 z/\partial u^2)^2}{(\partial\phi/\partial u)^2},\\[2ex] D''^2=\dfrac{(\partial^2\phi/\partial v^2\cdot\partial z/\partial v-\partial\phi/\partial v\cdot\partial^2 z/\partial v^2)^2}{(\partial\phi/\partial v)^2},\\[2ex] D'^2=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial\phi}{\partial v}-\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial\phi}{\partial u}\right)^2\dfrac{(\partial^2\phi/\partial u\partial v)^2}{(\partial\phi/\partial u)^2(\partial\phi/\partial v)^2}, \end{cases}$$

(1) EISENHART, L. P.: Surfaces of Constant Mean Curvature, American Journ. of Math. XXV (1903) p. 383.

where E, F, G are the first fundamental quantities and D, D′, D″ are the second fundamental quantities of our surface.[1]

From this we get

$$(5)\qquad \frac{(\partial z/\partial u\cdot\partial\phi/\partial v-\partial z/\partial v\cdot\partial\phi/\partial u)^2}{\partial\phi/\partial u\cdot\partial\phi/\partial v}\,dudv=0$$

as the equation of minimal curves.

$$(6)\qquad \left(\frac{\partial\phi}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial\phi}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial\phi}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial v^2}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial\phi}{\partial v}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)^2 dv^2$$
$$+\left(\frac{\partial\phi}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial\phi}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial\phi}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial u^2}\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial\phi}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right)du^2=0$$

is the equation of the line of curvature.

If the total curvature and the mean curvature be denoted by K and H, then we have

$$(7)\qquad \begin{cases} |\mathrm{K}|=\left|\dfrac{4\,(\partial\phi/\partial u\cdot\partial\phi/\partial v)}{(\partial z/\partial u\cdot\partial\phi/\partial v-\partial z/\partial v\cdot\partial\phi/\partial u)^4}\left\{\left(\dfrac{\partial^2\phi}{\partial u^2}\dfrac{\partial z}{\partial u}-\dfrac{\partial\phi}{\partial u}\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right)\left(\dfrac{\partial^2\phi}{\partial v^2}\dfrac{\partial z}{\partial v}-\dfrac{\partial\phi}{\partial v}\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)\right.\right. \\ \qquad\left.\left.-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial\phi}{\partial v}-\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial\phi}{\partial u}\right)^2\dfrac{(\partial^2\phi/\partial u\partial v)^2}{(\partial\phi/\partial u)(\partial\phi/\partial v)}\right\}\right|, \\ |\mathrm{H}|=\left|2\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial\phi}{\partial v}-\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial\phi}{\partial u}\right)^{-1}\dfrac{\partial^2\phi}{\partial u\partial v}\right|. \end{cases}$$

## ( 4 )

If $x$, $y$, $z$ are three solutions of

$$(1)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v}+\frac{\sigma}{\lambda}\frac{\partial\theta}{\partial u}+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\theta}{\partial v}=0,$$

such that $x^2+y^2$ is one solution of (1), then $(x, y, z)$ express one surface whose orthogonal projection on the $xy-$ plane expresses the orthogonal system.[2]

(1) EISENHART, L. P.: Differential geometry of curves and surfaces.
(2) TURRIÈRE, E.: Étude des réseaux conjugués orthogonaux en projection sur un plan, Bulletin de la Société Mathématique de France publié par les secretairès, Paris, 40, p. 228-238.

In this case

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{r-1}{s}\frac{dy}{dx} - 1 = 0$$

expresses a differential equation of plane systems.

## ( 5 )

We can put

$$(1)\quad \frac{1}{\lambda} = \frac{k_u}{4k}, \qquad (2)\quad \frac{\sigma}{\lambda} = \frac{k_v}{4k},$$

because we have[1]

$$(3)\quad \begin{cases} -\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{-E_vF + G_uE}{2(EG - F^2)} = -\dfrac{k_u}{4k}, \\ -\dfrac{\sigma}{\lambda} = \dfrac{-FG_u + GE_v}{2(EG - F^2)} = -\dfrac{k_v}{4k}. \end{cases}$$

From (1) and (2), we know that (**A**) becomes the equation[1]

$$(4)\quad 4k\mathfrak{x}_{uv} + k_v\mathfrak{x}_u + k_u\mathfrak{x}_v = 0.$$

From (4) we can prove the following theorms.

(**1**) If S: $\mathfrak{x}=\mathfrak{x}(u, v)$ is the first focal sheet of a congruence, the second sheet $S_1$ is given by

$$(5)\quad \mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x} + 4k/k_u \cdot \mathfrak{x}_u.$$

(**2**) The coordinates $\bar{\mathfrak{x}}$ of the mean point of the line have the expressions

$$(6)\quad \bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} + 2k/k_u \cdot \mathfrak{x}_u.$$

(**3**) We can prove that the necessary and sufficient condition that the tangents to the curves $v$=const. on S form a congruence of RIBAUCUR is

(1) RELLICH, F.: Die Bestimmung einer Fläche durch ihre GAUSZsche Krümmung, Math. Z. 43, S. 618.

$$(7) \qquad \frac{\partial(k_v:4k)}{\partial u} - \frac{\partial(k_u:4k)}{\partial v} + \frac{\partial^2(k_u:4k)}{\partial u\partial v} = 0.$$

(4) The condition that the point equation of S may have an equal invariant is

$$(8) \qquad \frac{\partial(k_v:4k)}{\partial u} = \frac{\partial(k_u:4k)}{\partial v}.$$

(5) The function $h$ and $k$, defined by

$$(9) \qquad h = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{k_v}{4k}\right) + \frac{k_u k_v}{16k^2}, \quad k = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{k_u}{4k}\right) + \frac{k_u k_v}{16k^2}$$

are called the invariants of the differential equation (4).

Hence we can state:

A necessary and sufficient condition that the focal surface $S_1$ or $S_{-1}$ be a curve is that the invariant $k$ or $h$ respectively of the point equation of S be zero.

(6) When in the point equation of a surface, namely

$$(10) \qquad \mathfrak{x}_{uv} + (k_v:4k)\,\mathfrak{x}_u + (k_u:4k)\,\mathfrak{x}_v = 0,$$

$k_v$ or $k_u$ is zero, the coördinates of the surface can be found by quadratures.

(7) The tangents to each system of parametric curves on a surface form congruences of RIBAUCOUR when the point equation is

$$(11) \qquad \mathfrak{x}_{uv} + U_1 V_1' \mathfrak{x}_u + U_1' V_1 \mathfrak{x}_v = 0,$$

where $U_1$ and $V_1$ are functions of $u$ and $v$ respectively, and the accents indicate differentiation.

(8) The LAPLACE equation, satisfied by $\mathfrak{x}' = \mathfrak{x}/\lambda$, is

$$(12) \qquad \frac{\partial^2}{\partial u\partial v}(\mathfrak{x}') + \frac{\partial\mathfrak{x}'}{\partial v}\left\{\frac{k_v}{4k} + \frac{\partial}{\partial v}\log\lambda\right\}\frac{\partial\mathfrak{x}'}{\partial u'} + \left\{\frac{k_u}{4k} + \frac{\partial}{\partial u}\log\lambda\right\}\frac{\partial\mathfrak{x}'}{\partial v}$$

where $\lambda = \lambda(u, v)$.

(9) When we can find one solution of

$$(13)\qquad \frac{\partial^2\phi}{\partial u\partial v}-\frac{k_v}{4k}\frac{\partial\phi}{\partial u}-\frac{k_u}{4k}\frac{\partial\phi}{\partial v}-\left(\frac{\partial(k_v/4k)}{\partial u}+\frac{\partial(k_u/4k)}{\partial v}\right)\phi=0,$$

then we can solve (**A**) by simple integration.[1]

(**10**) For the tangents to the curves of both families $u$=const., $v$=const. to be congruences of RIBAUCOUR it is necessary that

$$k_u k_v/k^2 = \mathrm{UV},$$

where U is a function of $u$ alone and V of $v$ alone.[2]

(**11**) If the tangents to the curves $v$=const. are to form a congruence of RIBAUCOUR, we must have

$$k : k_u = \mathrm{U}\cdot\mathrm{V}$$

where U and V are arbitrary functions of $u$ and $v$ respectively.[3]

---

(1) NAKAZIMA, S.: Über zwei Flächen, die eine Beziehung haben, Tôhoku Math. Journ., Vol. 33 (1930), p. 160.

(2) MATUMURA, S.: On a pair of surfaces mutually related, Tôhoku Math. Journ. Vol. 39 (1934), p. 19.

(3) MATUMURA, a. a. O., p. 21.

# BEITRÄGE ZUR GEOMETRIE DER KREISE UND KUGELN (XXIV)

Sôzi MATUMURA

(Accepted for publication, April 23, 1938.)

Im folgenden behandeln wir die Kreis- und Kugelgeometrie.

## ( 1 )

(A) Will man ein Ellipsoid sorgfältig einwickeln, so schlägt das Material Falten.

Will man ein einschaliges Hyperboloid gleichfalls so einwickeln, dasz das Material dicht anliegt, so droht der Stoff zu reiszen.

Flächen positiver und negativer Krümmung verhalten sich also verschieden.

Dies ist eine Erfahrung, die jedem Schneider geläufig ist.

Er weisz, dasz er die Körperoberfläche in zweckmäszig abgegrenzte Teile zerlegen musz, um einen gut sitzenden Anzug zustande zu bekommen.

Dies zuerst von TCHEBYCHEF[1] mathematisch angegriffene Bekleidungsproblem läuft bei Auszerachtlassen einer etwaigen Elastizität der Fäden darauf hinaus, in passend abgegrenztzten Stücken der Fläche Koordinaten so einzuführen, dasz die Parameter auf jeder Parameterlinie die Bedeutung Bogenlänge besitzen und dasz die erste Fundamentalform die Gestalt

$$(1) \qquad \dot{\alpha}_1^2 + 2F(\alpha_1, \alpha_2)\,\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2 + \dot{\alpha}_2^2$$

bekommt.

[Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ. Formosa, Japan, Vol. XXI, No. 3 June, 1938.]

(1) TCHEBYCHEF, P. L.: Sur le coupure des vêtements (1878). Vgl. Oeuvres Bd. II, S. 708.

Ist unsere Fläche eine Kreisfläche $(k)$ in (1), so kann man aus (1) wissen, dasz die erste Fundamentalform die Gestalt

$$(2) \qquad dt^2 + 2(\theta_t\theta_\tau)\,dtd\tau + d\tau^2$$

bekommt, wo

$$(3) \qquad t = \text{const.}, \quad \tau = \text{const.},$$

die Parameterlinien auf (K) sind.

Aus (2) kann man wissen, dasz

$$(4) \qquad dJ = \{1 - (\theta_t\theta_\tau)\}^{\frac{1}{2}}\,dtd\tau$$

besteht, wo $dJ$ das Flächendifferential ist.

Nach SCHEFFERS hat das allgemeinste Kurvennetz auf der Fläche ohne Umwege die Differentialgleichung[1]

$$(5) \qquad (1 - \varphi_t)\,dt^2 + 2\{(\theta_t\theta_\tau) - \varphi_t\varphi_\tau\}\,dtd\tau + (1 - \varphi_\tau^2)\,d\tau^2 = 0\,,$$

wo

$$\varphi_t = \partial\varphi/\partial t\,.\;\ldots$$

Weiter kann man wissen, dasz die folgenden Sätze bestehen.[2]

**Satz 1:** *Ein Kurvennetz*

$$(6) \qquad A(t,\tau)\,dt^2 + 2B(t,\tau)\,dtd\tau + C(t,\tau)\,d\tau^2 = 0$$

*auf $(k)$ ist dann und nur dann ein Orthogonalsystem, wenn*

$$(7) \qquad C - 2(\theta_t\theta_\tau)B + A = 0$$

*ist.*

**Satz 2:** *Um zwei Kreisflächen $(k)$ und $(\bar{k})$ konform aufeinander abzubilden, hat man solche Parameter auf beiden Kreisflächen einzuführen, in denen*

$$(8) \qquad (\theta_t\theta_\tau) = (\overline{\theta_t\theta_\tau})$$

*ist.*

**Satz 3:** *Definiert die Differentialgleichung*

---

(1) STAUER, P.: Über Kurvennetze ohne Umwege, Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung 47, S. 8.

(2) SCHEFFERS, G.: Theorie der Flächcn, S. 52.

$$d\tau/dt = \lambda(t, \tau)$$

*auf einer Kreisfläche keine Schar von Minimalkurven, so lautet die Differentialgleichung der Kurven, die zu den durch diese Gleichung definierten einfach unendlich vielen Kurven senkrecht sind,*[1] *folgendermaszen:*

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{1 + (\theta_t\theta_\tau)\lambda}{(\theta_t\theta_\tau) + \lambda}.$$

**Satz 4:** *Für den Winkel* $\alpha$, *den die Fortschreitungsrichtungen* $\mathrm{K}=d\tau : dt$ *und* $k=\delta\tau : \delta t$ *auf den Kreisflächen miteinander bilden, besteht die Formel:*[2]

$$\cos\alpha = \frac{1+(\theta_t\theta_\tau)\{\mathrm{K}+k\}+\mathrm{K}k}{\sqrt{1+2(\theta_t\theta_\tau)\mathrm{K}+\mathrm{K}^2}\sqrt{1+2(\theta_t\theta_\tau)k+k^2}}.$$

(**B**) Die Parameterlinien einer Kreisfläche $(k)$ bilden dann und nur dann ein Kurvennetz ohne Umwege, wenn

$$(1) \qquad \frac{\partial}{\partial\tau}\sqrt{\frac{(\theta_t\theta_t)}{\lambda}} = \frac{\partial}{\partial t}\sqrt{\lambda^{-1}}$$

genügen,[3] weil

$$(2) \qquad \lambda\mathrm{E} = (\theta_t\theta_t), \quad \lambda\mathrm{F} = (\theta_t\theta_\tau), \quad \lambda\mathrm{G} = 1$$

bestehen.[4]

Nun setzen wir

$$(3) \qquad \phi \equiv \{\theta_t\partial_t\}^{\frac{1}{2}}, \qquad \varphi = \lambda^{-\frac{1}{2}},$$

so folgt aus (2)

$$(4) \qquad \partial/\partial\tau\cdot(\varphi\phi) = \partial/\partial t\cdot\varphi$$

d. h. $\qquad \varphi_\tau\phi + \varphi\phi_\tau = \varphi_t,$

oder $\qquad \{\varphi_\tau : \varphi\} + \{\phi_\tau : \phi\} = \varphi_t : \{\phi\varphi\},$

(1) SCHEFFERS, a. a. O., S. 50.
(2) SCHEFFERS, a. a. O., S. 83.
(3) SCHEFFERS, G.: Theorie der Flächen, S. 52.
(4) NAKAZIMA, S.: Kugelgeo. von MÖBIUS, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri. Taihoku Imp. Univ. Vol. 2, p. 36.

d. h.

$$(5) \qquad \phi \cdot \{\partial/\partial\tau \cdot \log(\varphi\phi)\} = \partial/\partial t \cdot \log\varphi .$$

Aus (5) kann man $\varphi$ finden, weil

$$(\theta_t\theta_t), \qquad (\theta_t\theta_\tau), \qquad (\theta_\tau\theta_\tau)$$

gegeben sind.

Also ist der Bogenelement $ds^2$ auf $(k)$ völlig bestimmt.

Weiter kann man $d$J berechnen. wobei $d$J das Flächendifferential bedeutet.

(**C**) Ein Kurvennetz

$$(1) \qquad dt^2 + 2\,\mathrm{B}dtd\tau + \mathrm{C}d\tau^2 = 0$$

auf einer Kreisfläche (K) ist dann und nur dann ein Orthogonalsystem, wenn

$$(2) \qquad (\theta_t\theta_t)\mathrm{C} - 2(\theta_t\theta_\tau)\mathrm{B} + 1 = 0$$

ist,[1] wo B und C Funktionen von $t$, $\tau$ sind.

Das Netz der Parameterlinien auf $(k)$ ist dann und nur dann ein Orthogonalsystem, wenn

$$(3) \qquad (\theta_t\theta_\tau) = 0 ,$$

alsdann hat (2) die Form

$$(4) \qquad (\theta_t\theta_t)\mathrm{C} + 1 = 0 ,$$

so geht (1) in die Form über:

$$(5) \qquad dt^2 + 2\,\mathrm{B}dtd\tau - d\tau^2 : (\theta_t\theta_t) = 0 .$$

Wenn

$$(6) \qquad \mathrm{B} = 0 ,$$

so nimmt (5) die Form

$$(7) \qquad dt^2 - d\tau^2 : (\theta_t\theta_t) = 0 .$$

---

(1) SCHEFFERS, G.: Theorie der Flachen. S. 50.

(**D**) Betrachten wir eine Kugel um den Anfangspunkt als Mittelpunkt mit dem Radius als Kreisfläche, so entsteht[2]

$$(\theta_t\theta_t) = 1 + \tau^2/r^2\,, \quad (\theta_t\theta_\tau) = 1\,, \quad (\theta_\tau\theta_\tau) = 1\,.$$

Dies ist ein einfaches Beispiel für $(\theta_t\theta_t)$, $(\theta_t\theta_\tau)$, $(\theta_\tau\theta_\tau)$. Als ein anderes Beispiel wollen wir zwei in der gewöhnlichen Flächentheorie oft benutzte Formeln betrachten, dann entsteht[2]

$$[\mathfrak{x}_t\mathfrak{N}] = \frac{(\theta_t\theta_\tau)\,\mathfrak{x}_t - (\theta_t\theta_t)\,\mathfrak{x}_\tau}{\mathrm{T}}\,,$$

$$[\mathfrak{x}_\tau\mathfrak{N}] = \frac{(\theta_\tau\theta_\tau)\,\mathfrak{x}_t - (\theta_t\theta_\tau)\,\mathfrak{x}_\tau}{\mathrm{T}}\,,$$

wo

$$\mathrm{T}^2 = (\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau) - (\theta_t\theta_\tau)^2.$$

(**E**) Man kann wissen, eine Minimalkreisfläche lasse sich in der Parameterdarstellung mit den passenden Parametern $t$ und $\tau$ durch folgende Bedingungen charakterisieren: Die Ortsvektoren $\mathfrak{x}$ genügen der Potentialgleichung

$$\Delta\mathfrak{x} = 0$$

und sind den weiteren Bedingungen

$$(\theta_t\theta_t) = (\theta_\tau\theta_\tau), \qquad (\theta_t\theta_\tau) = 0$$

unterworfen.[3]

Weiter betrachten wir das Problem von PLATEAU, so kann man wissen, dasz

$$\Delta\mathfrak{x} = 0$$

zudem noch den Bedingungen

$$(\theta_t\theta_t) = (\theta_t\theta_\tau), \qquad (\theta_t\theta_\tau) = 0$$

genügen.[4]

---

(1) SCHEFFERS, G.: Theorie der Flächen, S. 19.
(2) ROTHE, R.: Differentialgeometrie, I, (Sammlung Göschen), S. 116.
(3) COURANT und HILBERT: Methoden der mathematischen Physik, II (1937), S. 134.
(4) COURANT und HILBERT a. a. O., S. 535.

(F) Schon haben wir bewiesen, dasz die Gleichung der Minimallinien auf der Kreisfläche (K) mit

$$(1) \qquad (\theta_t\theta_t)\,dt^2 + 2\,(\theta_t\theta_\tau)\,dt d\tau + d\tau^2 = 2$$

bezeichnenbar ist.

Wir betrachten[1]

$$(2) \qquad \sqrt{(\theta_t\theta_t)}\,dt + (1 \pm \sqrt{2}\,)\,d\tau = 0$$

so bilden zwei Kurven (2) mit $\tau$=const. auf (K) den Winkel $3\pi/8$ und $7\pi/8$.

(G) Die Gleichung der Torsionslinien ist[2]

$$(1) \qquad (\theta_t\theta_t)\,(\theta_t\theta_\tau)\,dt^2 + 2\,(\theta_t\theta_t)\,(\theta_\tau\theta_\tau)\,dt d\tau + (\theta_t\theta_\tau)\,(\theta_\tau\theta_\tau)\,d\tau^2 = 0\,.$$

Die Gleichung der Minimallinien ist

$$(2) \qquad (\theta_t\theta_t)\,dt^2 + 2\,(\theta_t\theta_\tau)\,dt d\tau + (\theta_\tau\theta_\tau)\,d\tau^2 = 0\,.$$

Beide liegen auf $(k)$.

Aus (1) und (2) kann man wissen, dasz (1) ein Orthogonalsystem bildet.

Weiter kann man sagen, das durch die Gleichung (1) definierte Kurvennetz auf $(k)$ habe im Punkt $(t, \tau)$ zwei Tangenten $h_1$ und $h_2$, die dort mit den beiden Tangenten $t_\tau$ unk $t_t$ der Parameterlinien $(\tau)$ und $(t)$ zwei Doppelverhältnisse $(h_0 h_2 t_\tau t_t)$ und $(h_2 h_1 t_\tau t_t)$ bilden, und diese beiden letzteren seien die Wurzeln $\Delta$ der quadratischen Gleichung

$$(\theta_t\theta_\tau)^2\Delta^2 - 2\,\{(\theta_t\theta_t)\,(\theta_\tau\theta_\tau) - (\theta_t\theta_\tau)^2\}\,\Delta + (\theta_t\theta_\tau)^2 = 0\,.$$

Das eine Doppelverhältnis ist der reziproke Wert der anderen. Wenn die Torsionslinien zugleich die Minimallinien bezeichnen, so folgt

$$(\theta_t\theta_\tau) = \frac{(\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau)}{(\theta_t\theta_\tau)} = (\theta_t\theta_\tau)\,.$$

(1) HAYASI, T.: Certain double systems of curves on a surface, Sci. Reports of the Tôhoku Imp. Univ., Vol. VIII, p. 217.

(2) OGURA, K.: On the theory of representation of surfaces, Tôhoku Math. Journ. 12, S. 264.

( 2 )

Wir betrachten zwei Strecken $\mathfrak{K}$ und $\tilde{\mathfrak{K}}$ in $R_3$, die durch die beiden Punktpaare $\mathfrak{x}^\alpha$ und $\tilde{\mathfrak{x}}^\lambda$ $[\alpha, \lambda = \mathrm{I}, \mathrm{II}]$ dargestellt sind, wo $\mathfrak{x}^\alpha$ $[\alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}]$ zwei Punkte sind.

Wir definieren

$$(1) \qquad A^{\alpha\beta} = (\mathfrak{x}^\alpha \mathfrak{x}^\beta), \quad \tilde{A}^{\lambda\mu} = (\tilde{\mathfrak{x}}^\lambda \tilde{\mathfrak{x}}^\mu)$$

mit

$$(2) \qquad A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha}, \quad \tilde{A}^{\lambda\mu} = \tilde{A}^{\mu\lambda}$$

und setzen

$$(3) \qquad A = |A^{\alpha\beta}| > 0, \quad \tilde{A} = |\tilde{A}^{\lambda\mu}| > 0$$

voraus.

Dann haben wir für $\mathfrak{K}$, $\tilde{\mathfrak{K}}$ die Büscheltransformationen

$$(4) \qquad \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^\alpha = c^\alpha_\beta \mathfrak{x}^\beta, \quad \overset{*}{\tilde{\mathfrak{x}}}{}^\lambda = \tilde{c}^\lambda_\mu \tilde{\mathfrak{x}}^\mu$$

zu berücksichtigen.

Daher haben wir die Vektoren und die Tensoren bezüglich der Büscheltransformationen von $\mathfrak{K}$ einerseits und von $\tilde{\mathfrak{K}}$ anderseits zu unterscheiden.

In

$$(5) \qquad S^{\alpha\lambda} = (\mathfrak{x}^\alpha \tilde{\mathfrak{x}}^\lambda)$$

haben wir ein Grössensystem, bei dem beide Arten von Indizes vorkommen, einen gemischten Tensor, der sich nach

$$(6) \qquad \overset{*}{S}{}^{\alpha\lambda} = c^\alpha_\beta \tilde{c}^\lambda_\mu S^{\beta\mu}$$

transformiert.

Wir schliessen nun den Fall aus, dass die Matrix

$$(7) \qquad \| \mathfrak{x}^{\mathrm{I}}, \mathfrak{x}^{\mathrm{II}}, \tilde{\mathfrak{x}}^{\mathrm{I}}, \tilde{\mathfrak{x}}^{\mathrm{II}} \| \equiv 0$$

ist, wo eine lineare Beziehung der Form

$$(8) \qquad \sigma_\alpha \mathfrak{x}^\alpha = \tilde{\sigma}_\lambda \tilde{\mathfrak{x}}^\lambda$$

besteht.

Die Bedeutung von (8) ist aber die, dass es einen Punkt

$$(9)\qquad \mathfrak{z} = \sigma_\alpha \mathfrak{x}^\alpha = \tilde{\sigma}_\lambda \tilde{\mathfrak{x}}^\lambda$$

gibt.

Wir bilden nun den in $\alpha$ und $\beta$ symmetrischen Tensor

$$(10)\qquad T^{\alpha\beta} = \tilde{A}_{\lambda\mu} S^{\alpha\lambda} S^{\beta\mu} = S^{\alpha}_{.\mu} S^{\beta\mu}.$$

Statt $\tilde{A}^{\lambda\mu}$, $S^{\alpha\lambda}$ führen wir nun $T^{\alpha\beta}$ neben $A^{\alpha\beta}$ ein.

Dann haben wir beide Invarianten

$$(11)\qquad K = T / A, \qquad H = 1/2\, T^{\alpha}_{\alpha},$$

wo T die Determinante $|T^{\alpha\beta}|$ ist.

Weiter ergibt sich

$$(12)\qquad T = S^2 / \tilde{A},$$

wo

$$(13)\qquad S = | S^{\alpha\lambda} |.$$

Somit hat man auch

$$(14)\qquad K = S^2 / A \cdot \tilde{A}, \quad H = 1/2\, S_{\alpha\lambda} S^{\alpha\lambda}.$$

Jetzt sind unsere Untersuchungen so gut wie in meiner früheren Arbeit.[1]

## ( 3 )

(**A**) Betrachten wir drei Kreise $\xi$, $\eta$ und $\mathfrak{z}$ in $R_2$.

$\xi$, $\eta$ und $\mathfrak{z}$ berühren sich in der Auszenseite, so entsteht

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathfrak{v} = \xi - (\xi\eta)\,\eta, \quad \mathfrak{w} = \mathfrak{z} - (\mathfrak{z}\xi)\,\xi, \quad \mathfrak{u} = \eta - (\eta\mathfrak{z})\,\mathfrak{z}, \\ (\mathfrak{t}\mathfrak{v}) = 0, \quad (\mathfrak{t}\mathfrak{w}) = 0, \quad (\mathfrak{t}\mathfrak{u}) = 0, \end{cases}$$

wo $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ die Berührungspunkte und $\mathfrak{t}$ der Kreis ist, der durch $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ geht.

Aus (1) folgt

(1) NAKAZIMA, S.: Differentialgeo. der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ., Vol. 34, p. 191.

$$(2)\quad \begin{cases}(\mathfrak{t}\mathfrak{x}) = (\mathfrak{x}\mathfrak{y})(\mathfrak{t}\mathfrak{y}),\\ (\mathfrak{t}\mathfrak{z}) = (\mathfrak{z}\mathfrak{x})(\mathfrak{t}\mathfrak{x}),\\ (\mathfrak{t}\mathfrak{y}) = (\mathfrak{y}\mathfrak{z})(\mathfrak{t}\mathfrak{z}).\end{cases} \qquad \text{oder} \qquad (3)\quad \begin{cases}\cos\widehat{\mathfrak{t},\mathfrak{x}} = \cos\widehat{\mathfrak{x},\mathfrak{y}}\cdot\cos\widehat{\mathfrak{t},\mathfrak{y}},\\ \cos\widehat{\mathfrak{t},\mathfrak{z}} = \cos\widehat{\mathfrak{z},\mathfrak{x}}\cdot\cos\widehat{\mathfrak{t},\mathfrak{x}},\\ \cos\widehat{\mathfrak{t},\mathfrak{y}} = \cos\widehat{\mathfrak{y},\mathfrak{z}}\cdot\cos\widehat{\mathfrak{t},\mathfrak{z}},\end{cases}$$

oder

$$(4)\qquad \cos\widehat{\mathfrak{t}\mathfrak{x}} = \cos\widehat{\mathfrak{t}\mathfrak{z}} = \cos\widehat{\mathfrak{t}\mathfrak{y}}\,.$$

(4) ist unser Resultat, wo $\widehat{\mathfrak{t},\mathfrak{x}}$ den Winkel zwischen $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{x}$ bedeutet.

(**B**) Wir betrachten

$$(1)\qquad G = \frac{(\mathfrak{U}\mathfrak{v})(\mathfrak{K}\mathfrak{K})}{(\mathfrak{U}\mathfrak{K})(\mathfrak{v}\mathfrak{K})}$$

in THOMSENS Arbeit.(1)

Ist $\mathfrak{K}$ ein Kreis und $\mathfrak{U}$ ein nicht auf ihm gelegener Punkt, so ist

$$(2)\qquad \bar{\mathfrak{U}} = 2(\mathfrak{U}\mathfrak{K})\mathfrak{K} - \mathfrak{U}$$

der zu $\mathfrak{U}$ in bezug auf den Kreis $\mathfrak{K}$ inverse Punkt.

Von $\mathfrak{v}$ gilt die gleichung

$$(3)\qquad \bar{\mathfrak{v}} = 2(\mathfrak{v}\mathfrak{K})\mathfrak{K} - \mathfrak{v}\,.$$

Aus (1), (2), und (3) folgt

$$(4)\qquad G = \frac{2(\mathfrak{U}\mathfrak{v})(\mathfrak{K}\mathfrak{K})}{(\bar{\mathfrak{U}}\mathfrak{v}) + (\mathfrak{U}\mathfrak{v})}$$

oder

$$(5)\qquad G = \frac{2(\mathfrak{U}\mathfrak{v})(\mathfrak{K}\mathfrak{K})}{(\bar{\mathfrak{v}}\mathfrak{U}) + (\mathfrak{v}\mathfrak{U})}\,.$$

Wenn

$$(6)\qquad (\bar{\mathfrak{U}}\mathfrak{v}) = (\mathfrak{U}\mathfrak{v})$$

in (4), so folgt

$$(7)\qquad G = 1\,.$$

(1) THOMSEN, G.: Bericht über differentialgeo. Untersuchungen zur Kugelgeo, Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung XXXVIII, S. 99.

Wenn

$$(8)\qquad (\bar{\mathfrak{U}}\mathfrak{v}) = -(\mathfrak{U}\mathfrak{v})$$

in (4), so folgt

$$(9)\qquad G = \infty,$$

so kann man sagen, wenn der Abstand zwischen $\bar{\mathfrak{U}}$ und $\mathfrak{v}$ gleich dem[1] zwischen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{v}$ sei, so bestehe (7).

Von (5) gilt dasselbe.

Aus (4), (5) folgt

$$(10)\qquad (\mathfrak{U}\bar{\mathfrak{v}}) = (\mathfrak{U}\mathfrak{v}),$$

so ist der Abstand zwischen $\mathfrak{U}$ und $\bar{\mathfrak{v}}$ gleich dem zwischen $\bar{\mathfrak{U}}$ und $\mathfrak{v}$.

Aus (5) folgt

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{2}{G} = \dfrac{(\mathfrak{U}\mathfrak{v}) + (\mathfrak{U}\bar{\mathfrak{v}})}{(\mathfrak{U}\mathfrak{v})(\mathfrak{K}\mathfrak{K})} \\[2ex] \quad = \dfrac{1}{(\mathfrak{K}\mathfrak{K})} + \dfrac{(\mathfrak{U}\bar{\mathfrak{v}})}{(\mathfrak{U}\mathfrak{v})(\mathfrak{K}\mathfrak{K})} \\[2ex] \quad = 1 + \dfrac{(\mathfrak{U}\bar{\mathfrak{v}})}{(\mathfrak{U}a)}, \end{cases}$$

so ist G der Mittelwert der harmonischen Reihe zwischen 1 und $(\mathfrak{u}\bar{\mathfrak{v}})/(\mathfrak{u}\bar{\mathfrak{v}})$, wo $(\mathfrak{u}\bar{\mathfrak{v}})$ der Quadrat von dem Abstand zwischen $\mathfrak{u}$ und $\bar{\mathfrak{v}}$, $(\mathfrak{u}\mathfrak{v})$ derjenige von dem Abstand zwischen $\mathfrak{u}$ und $\bar{\mathfrak{v}}$ ist.

Von (4) gilt das gleiche.

Aus (1) und (5) entsteht

$$(12)\qquad 2(\mathfrak{u}\mathfrak{K})(\mathfrak{v}\mathfrak{K}) = (\bar{\mathfrak{v}}\mathfrak{u}) + (\mathfrak{v}\mathfrak{u}).$$

Aus (12) kann man wissen, dasz der Quadrat vom geometrischen Mittel von $(\mathfrak{u}\mathfrak{K})$ und $(\mathfrak{v}\mathfrak{K})$ dem arithmetischen Mittel von $(\bar{\mathfrak{v}}\mathfrak{u})$ und $(\mathfrak{v}\mathfrak{u})$ gleich ist.

Von (1) und (4) gilt dasselbe.

Setzen wlr

---

(1) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geo. der Kreise und Kugeln (XVI), Mem. of the Fac. of Sci. and Agr., Taihoku Imp. Univ., Vol. XVIII, S. 64.

$$(13)\qquad g=\frac{(\bar{\mathfrak{u}}\bar{\mathfrak{v}})(\mathfrak{K}\mathfrak{K})}{(\bar{\mathfrak{u}}\mathfrak{K})(\bar{\mathfrak{v}}\mathfrak{K})},$$

so folgt aus (1)

$$(14)\qquad \frac{G}{g}=\frac{(\mathfrak{u}\mathfrak{v})(\bar{\mathfrak{u}}\bar{\mathfrak{K}})(\bar{\mathfrak{v}}\mathfrak{K})}{(\bar{\mathfrak{u}}\bar{\mathfrak{v}})(\mathfrak{u}\mathfrak{K})(\mathfrak{v}\mathfrak{K})}=1,$$

h. h. (15) $\quad G=g,$

wenn $\mathfrak{u}\equiv\bar{\mathfrak{u}}$, $\mathfrak{v}=\bar{\mathfrak{v}}$, d. h. $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ auf $\mathfrak{K}$ liegen.

Wir betrachten

$$(16)\qquad G'=\frac{(\mathfrak{u}'\mathfrak{v}')(\mathfrak{k}'\mathfrak{k}_2)}{(\mathfrak{u}'\mathfrak{k}')(\mathfrak{v}\mathfrak{k}')},$$

so folgt

$$(17)\qquad G':G=\frac{(\mathfrak{u}\mathfrak{k})(\mathfrak{v}\mathfrak{k})}{(\mathfrak{u}'\mathfrak{k})(\mathfrak{v}'\mathfrak{k})},$$

wo

$$(18)\qquad \mathfrak{k}'\equiv\mathfrak{k},\ (\mathfrak{k}\mathfrak{k})=1,\ (\mathfrak{k}'\mathfrak{k}')=1,\ (\mathfrak{u}\mathfrak{v})=(\mathfrak{u}'\mathfrak{v}')$$

sind.

Nun besteht

$$(19)\qquad (\bar{\mathfrak{u}}\mathfrak{k})=(\mathfrak{u}\mathfrak{k}),\ (\bar{\mathfrak{v}}\mathfrak{k})=(\mathfrak{v}\mathfrak{k}),\ (\bar{\mathfrak{u}}'\mathfrak{k})=(\mathfrak{u}'\mathfrak{k}),\ (\bar{\mathfrak{v}}'\mathfrak{k})=(\mathfrak{v}'\mathfrak{k}),$$

so entsteht aus (17)

$$(20)\qquad G':G=\frac{(\mathfrak{u}\mathfrak{k})(\mathfrak{v}\mathfrak{k})}{(\mathfrak{u}'\mathfrak{k})(\mathfrak{v}'\mathfrak{k})}=\frac{(\bar{\mathfrak{u}}\mathfrak{k})(\bar{\mathfrak{v}}\mathfrak{k})}{(\bar{\mathfrak{u}}\mathfrak{k})(\bar{\mathfrak{v}}\mathfrak{k})}=\frac{\bar{G}'}{\bar{G}},$$

wo wir verschiedene Punkte mit Strichen und inversen Punkten mit Quer bezeichnen.

(C) Ist

$$(1)\qquad \mathfrak{y}=\rho_\alpha(t)\,\mathfrak{x}^\alpha,\qquad [\alpha=\mathrm{I},\mathrm{II}]$$

eine Kugel, so folgt

$$(2)\qquad A^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta=1,$$

wo $\mathfrak{x}$ eine Kugel in $R_2$ ist.

Weiter bestehen[1]

$$(8)\qquad 64\,R^4 \geqq (a^2+b^2+c^2)^2 - 48\cdot s(s-a)(s-b)(s-c),$$

$$(9)\qquad 8R^2 \geqq (a^2+b^2+c^2) - \{4/3\sqrt{3}\}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ ,$$

u. s. w..

(F) Wir betrachten die Mittelpunktkurve $\mathfrak{x}(t)$ von $\xi(t)$ in $R_2$, so folgt[2]

$$(1)\qquad \mathfrak{x}(t) = \{\mathfrak{v}(t) + \bar{\mathfrak{v}}(t)\} \div 2.$$

Aus (1) ergibt sich aus (35) in THOMSENs Arbeit.[3]

$$(2)\qquad 2\,\mathfrak{x}_\sigma = \mathfrak{v}_\sigma + \bar{\mathfrak{v}}_\sigma = -(c+\bar{c})\,\xi_\sigma .$$

Aus (2) folgt

$$(3)\qquad \xi_\sigma = \xi' = -2\,\mathfrak{x}_\sigma : \{c+\bar{c}\}\ .$$

Nun betrachten wir

$$(4)\qquad \eta = \cos\alpha\cdot\xi + \sin\alpha\cdot\xi'$$

in THOMSENs Arbeit,[4] so folgt

$$(5)\qquad \eta = \cos\alpha\cdot\{2\mathfrak{x} - \bar{\mathfrak{v}}\} - 2\sin\alpha\cdot\mathfrak{x}' : \{c+\bar{c}\}\ ,$$

Weiter

$$(6)\qquad \xi(\sigma) + \xi'' = \xi - \xi + c\bar{\mathfrak{v}} = c\bar{\mathfrak{v}} = c\,\{2\mathfrak{x} - \mathfrak{v}\}\ .$$

Wenn $\mathfrak{x}$ in (1) ein Kreis ist, so folgt

$$(7)\qquad 1 - (\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = (\mathfrak{v}\bar{\mathfrak{v}}) : 2\,,$$

woraus sich ergibt

$$(8)\qquad (\mathfrak{v}\bar{\mathfrak{v}}) = 2\,.$$

Aus (8) kann man wissen, dasz die Länge zwischen zwei Punkten $\mathfrak{v}$ und $\bar{\mathfrak{v}}$ gleich $\sqrt{2}$ ist.

---

(1) NAKAZIMA, S.: Some inequalities between the fundamental quantities, Tôhoku Math. Journ. 25, p. 118.
(2) THOMSEN, G.: Über konforme Geo. II, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ, 4, S. 125.
(3) THOMSEN, O., a. a. O., S., 130.
(4) THOMSEN, G., a. a. O., S., 132.

Man hat für die Bogenlänge

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_a^t \sqrt{(\mathfrak{x}')^2}\, d\tau \\ &= \tfrac{1}{2} \int_a^t \sqrt{(\mathfrak{v}' + \bar{\mathfrak{v}}')^2}\, d\tau \\ &= \tfrac{1}{2} \int_a^t \sqrt{\mathfrak{v}'^2 + \bar{\mathfrak{v}}'^2 + 2\,\mathfrak{v}'\bar{\mathfrak{v}}'}\, d\tau\,. \end{aligned}$$

(G) Wir betrachten

$$(1) \qquad \eta = \xi \cos\alpha + \xi' \sin\alpha\,,$$

wo $\xi$ der Kreis in $R_2$ ist.

Wir setzen

$$(2) \qquad \begin{cases} ps^2 = (d\eta d\eta), \\ d\sigma^2 = (d\xi d\xi), \\ dt^2 = (d\mathfrak{v} d\mathfrak{v}) = (d\bar{\mathfrak{v}} d\bar{\mathfrak{v}}), \\ \mathfrak{X} = d\eta / ds\,, \end{cases}$$

wo $\mathfrak{v}$, $\bar{\mathfrak{v}}$ zwei Umführungskurven von $\xi(\sigma)$ sind.

Nun setzen wir

$$(3) \qquad \begin{cases} \mathfrak{z} = i\mathfrak{X} - \eta\,, \\ \bar{\mathfrak{z}} = -\, i\mathfrak{X} - \eta\,, \quad i = \sqrt{-1}\,, \end{cases}$$

so folgt

$$(4) \qquad (\mathfrak{z}\mathfrak{z}) = 0 = (\bar{\mathfrak{z}}\bar{\mathfrak{z}})\,,$$

wo

$$(5) \qquad (\mathfrak{X}\mathfrak{X}) = 1$$

ist.

Somit kann man mit $\mathfrak{z}$ oder $\bar{\mathfrak{z}}$ den Punkt bezeichnen.

(H) Wir betrachten(1) $\eta(\sigma)$ in

$$(1) \qquad \eta(\sigma) = \cos\alpha \cdot \xi(\sigma) + \sin\alpha \cdot \xi'(\sigma),$$

wo $\alpha$ eine Konstante ist.

(1) THOMSEN, G.: Über konforme Geo. II, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ. 4, S. 132.

Für $\eta(\sigma)$ besteht

$$(2)\qquad \begin{cases} \eta_{\sigma\sigma} = -\eta + \bar{c}\mathfrak{d} + c\bar{\mathfrak{d}}, \\ \mathfrak{d}_\sigma = -c\eta_\sigma, \\ \bar{\mathfrak{d}}_\sigma = -\bar{c}\eta_\sigma, \end{cases}$$

wo $\mathfrak{d}$, $\bar{\mathfrak{d}}$ zwei Umführungskurven von $\eta$ sind.

Aus (2) folgt

$$(3)\qquad \begin{cases} \cos\alpha\,\xi'' + \sin\alpha\,\xi''' = -\cos\alpha\,\xi - \sin\alpha\,\xi' + \bar{c}\mathfrak{d} + c\bar{\mathfrak{d}}, \\ \mathfrak{d}' = -c\cos\alpha\,\xi' - c\sin\alpha\,\xi'' \\ \bar{\mathfrak{d}}' = -\bar{c}\cos\alpha\,\xi' - \bar{c}\sin\alpha\,\xi''. \end{cases}$$

(3) ist die Verallgemeinerung der Frenetschen Formeln in unserm Fall.

(I) Ist $\xi$ ein Kreis und $\mathfrak{z}$ ein anderer Kreis in $R_2$, so ist

$$(1)\qquad \mathfrak{y} = 2(\mathfrak{z}\xi)\xi - \mathfrak{z}$$

*der zu $\mathfrak{z}$ in bezug auf den Kreis $\xi$ inverse Kreis.*

Aus (1) folgt

$$(2)\qquad (\mathfrak{z}\mathfrak{y}) = 2(\mathfrak{z}\xi)^2 - 1.$$

Sind $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{y}$ zueinander senkrecht, so entsteht

$$(3)\qquad 0 = 2(\mathfrak{z}\xi)^2 - 1,$$

daraus folgt

$$(4)\qquad (\mathfrak{z}\xi) = \pm 1/\sqrt{2},$$

d. h. $\mathfrak{z}$ und $\xi$ bilden den Winkel $\pi/4$ oder $3\pi/4$.

Wenn $\mathfrak{z}$ in (1) ein Punkt $\mathfrak{b}$ ist, so ist $\mathfrak{y}$ auch ein Punkt $\mathfrak{w}$.

Aus (1) folgt

$$(5)\qquad \mathfrak{w} = 2(\mathfrak{b}\xi)\xi - \mathfrak{b}.$$

Aus (5) entsteht

$$(6)\qquad (\mathfrak{w}\mathfrak{b}) = 2(\mathfrak{b}\xi)(\mathfrak{b}\xi).$$

(6) zeigt, der Winkel zwischen $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{w}$ sei gleich

$$(7) \qquad \sqrt{2}\,(\mathfrak{v}\xi),$$

d. h. $(\mathfrak{v}\xi)$ bedeute $a/\sqrt{2}$, wo $a$ der Abstand zwischen $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ sei.

Wir betrachten zwei Kreise

$$\xi$$

und

$$\{\mathfrak{y} + \mathfrak{z}\} \div 2$$

in (1), so ist

$$(8) \qquad \bar{\mathfrak{y}} = 2\left(\frac{\mathfrak{y}+\mathfrak{z}}{2}\,\xi\right)\xi - \frac{\mathfrak{y}+\mathfrak{z}}{2}$$

der zu $\frac{\mathfrak{y}+\mathfrak{z}}{2}$ in bezug auf den Kreis $\xi$ inverse Kreis.

Aus (1) folgt

$$(9) \qquad \bar{\mathfrak{y}} = (\mathfrak{z}\xi)\,\xi - 2\mathfrak{z},$$

so kommt zustande

$$(10) \qquad (\bar{\mathfrak{y}}\xi) = -(\mathfrak{z}\xi)$$

d. h.

$$(11) \qquad |\cos\phi| = |\cos\varphi|,$$

wo $\phi$ der Winkel zwischen $\bar{\mathfrak{y}}$ und $\xi$, $\varphi$ der zwischen $\mathfrak{z}$ und $\xi$ ist.

(**J**) Wir betrachten

$$(1) \qquad \eta(\sigma) = \cos\alpha\cdot\xi(\sigma) + \sin\alpha\cdot\xi'(\sigma)$$

in $R_2$, wo $\alpha$ die Konstante ist.

Ist $\eta$ ein Kreis und $\zeta$ ein nicht auf ihm gelegener Punkt, so ist

$$\begin{aligned}(2) \qquad \bar{\zeta} &= 2(\zeta\eta)\,\eta - \zeta \\ &= -\zeta + 2(\zeta, \cos\alpha\cdot\xi + \sin\alpha\cdot\xi')\,\{\cos\alpha\cdot\xi + \sin\alpha\cdot\xi'\} \\ &= -\zeta + 2\cos^2\alpha\,(\xi\zeta)\,\xi + 2\sin\alpha\cos\alpha\,(\zeta\xi')\,\xi \\ &\qquad + 2\sin\alpha\cos\alpha\,(\xi\zeta)\,\xi' + 2\sin^2\alpha\,(\zeta\xi')\,\xi'\end{aligned}$$

der zu $\zeta$ in bezug auf den Kreis $\eta$ inverse Punkt.

Liegt $\zeta$ auf $\xi$, so folgt aus (2)

$$(3)\qquad \bar{\zeta} = (\zeta\xi')\{\sin 2\alpha\cdot\xi + 2\sin^2\alpha\cdot\bar{\xi}\} - \zeta\,.$$

Aus (3) entsteht

$$(4)\qquad \begin{aligned}(\xi\bar{\zeta}) &= -(\zeta\xi) + 2\cos^2\alpha\cdot(\xi\zeta)\\ &= (\zeta\xi)\{2\cos^2\alpha - 1\}\,.\end{aligned}$$

Aus (4) kann man wissen, wenn

$$(\xi\bar{\zeta}) = 0\,,$$

so entstehe

$$(\zeta\xi) = 0$$

oder

$$\cos^2\alpha = \pm 1/\sqrt{2}\ ,$$

so folgt der

**Satz:** *Wenn sich $\xi$ und $\bar{\zeta}$ berühren und $\zeta$ und $\xi$ auch es tun, so ist $\alpha'$ entweder $\pi/4$ oder $3\cdot\pi/4$ gleich.*

(**K**) Ist $\mathfrak{d}$ ein Berührungspunkt zweier Kreise $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ in $R_2$, so kommt zustande

$$(1)\qquad \mathfrak{d} = \mathfrak{x} - (\mathfrak{x}\mathfrak{y})\,\mathfrak{y}\,.$$

Liegt $\mathfrak{d}$ auf einem Kreis $\xi$, so folgt

$$(2)\qquad 0 = (\mathfrak{d}\xi) = (\mathfrak{x}\xi) - (\mathfrak{x}\mathfrak{y})(\xi\mathfrak{y}),$$

daraus ergibt sich

$$(3)\qquad (\mathfrak{x}\xi) = (\mathfrak{x}\mathfrak{y})(\xi\mathfrak{y})\,.$$

Nun betrachten wir[1]

$$(4)\qquad G = \frac{(\mathfrak{x}\xi)(\mathfrak{y}\mathfrak{y})}{(\mathfrak{x}\mathfrak{y})(\xi\mathfrak{y})}\,.$$

Sind $\mathfrak{x}$ und $\xi$ zwei unendlich kleine Kreise, so folgt aus (3) und (4)

(1) MATUMURA, S.: Beiträge znr Geo. der Kreise und Kugeln (XVI), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. XVIII, S. 64.

$$(5) \qquad G = 1 .$$

Ist $\mathfrak{v}$ ein Berührungspunkt zweier Kreise $\xi$ und $\eta$ in $R_2$, so entsteht

$$(6) \qquad \mathfrak{U} = \xi - (\xi\eta)\,\eta .$$

Aus (5), (6) folgt

$$(7) \qquad G = \frac{(\mathfrak{U}\mathfrak{v})(\mathfrak{k}\mathfrak{k})}{(\mathfrak{U}\mathfrak{k})(\mathfrak{v}\mathfrak{k})}$$

$$= \frac{(\xi\mathfrak{x}) - (\mathfrak{x}\mathfrak{y})(\xi\mathfrak{y}) - (\xi\eta)(\mathfrak{x}\eta) + (\mathfrak{x}\mathfrak{y})(\xi\eta)(\mathfrak{y}\eta)}{\{(\xi\mathfrak{k}) - (\xi\eta)(\eta\mathfrak{k})\}\ \{(\mathfrak{x}\mathfrak{k}) - (\mathfrak{x}\mathfrak{y})(\mathfrak{y}\mathfrak{k})\}} = \infty,$$

wenn $\mathfrak{k} = \mathfrak{y}$ ist.

$$(8) \qquad \mathfrak{y} = 2\,(\mathfrak{v}\xi)\,\xi - \mathfrak{v}$$

ist der zu $\mathfrak{v}$ in bezug auf den Kreis $\xi$ inverse Punkt, wo (1) gilt.

Aus (8) folgt

$$(9) \qquad \mathfrak{y} = 2\,\{(\mathfrak{x}\xi) - (\mathfrak{x}\mathfrak{y})(\mathfrak{y}\xi)\}\,\xi - \{\mathfrak{x} - (\mathfrak{x}\mathfrak{y})\,\mathfrak{y}\} ,$$

daraus ergibt sich

$$(10) \qquad (\mathfrak{y}\xi) = 2\,(\mathfrak{x}\xi) - 2\,(\mathfrak{x}\mathfrak{y})(\mathfrak{y}\xi) - (\mathfrak{x}\xi) + (\mathfrak{x}\mathfrak{y})(\xi\mathfrak{y})$$
$$= (\mathfrak{x}\xi) - (\mathfrak{x}\mathfrak{y})(\mathfrak{y}\xi),$$

d. h.

$$(11) \qquad (\mathfrak{y}\xi)\,\{1 + (\mathfrak{x}\mathfrak{y})\} = (\mathfrak{x}\xi) .$$

Aus (11) kann man wissen, wenn $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = 0$, so folge $(\mathfrak{y}\xi) = (\mathfrak{x}\xi)$, d. h. $\xi$ bilde mit $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}$ einen gleichen Winkel, wenn $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ zueinander senkrecht seien.

$\mathfrak{x}$ in

$$(12) \qquad \mathfrak{x} = \xi - (\xi\eta)\,\eta$$

bezeichnet den Berührungspunkt zweier Kreise $\xi$ und $\eta$.

$$(13) \qquad \mathfrak{y} = 2\,(\xi\eta)\,\eta - \xi$$

ist der zu $\xi$ in bezug auf den Kreis $\eta$ inverse Kreis.

Aus (12), (13) folgt

$$(14)\qquad \mathfrak{y} = \xi - 2\,\mathfrak{x}.$$

(14) zeigt, $\mathfrak{y}$ berühre $\xi$ in $\mathfrak{x}$.

(**L**) $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ sind zwei Kreise in $R_2$, so ist

$$(1)\qquad \mathfrak{y}' = 2\left(\frac{\mathfrak{y}-\mathfrak{z}}{2}\,\xi\right)\xi - \frac{\mathfrak{y}-\mathfrak{z}}{2}$$
$$= (\mathfrak{y}\xi)\,\xi - (\xi\mathfrak{z})\,\xi - \mathfrak{y}/2 + \mathfrak{z}/2$$

der zu $\{\mathfrak{y}-\mathfrak{z}\}/2$ in bezug auf den Kreis $\xi$ inverse Kreis.

Aus (1) folgt

$$(2)\qquad 2\,(\mathfrak{y}'\xi) = (\xi\mathfrak{y}) - (\xi\mathfrak{z}).$$

Wenn $(\mathfrak{y}'\xi)=0$ in (2), so folgt

$$(3)\qquad (\xi\mathfrak{y}) = (\xi\mathfrak{z}),$$

d. h.

$$(4)\qquad \cos\lambda = \cos\mu,$$

wo $\lambda$ der Winkel zwischen $\xi$ und $\mathfrak{y}$, $\mu$ der zwischen $\xi$ und $\mathfrak{z}$ ist.

Weiter betrachten wir

$$(5)\qquad \frac{p\mathfrak{y}+q\mathfrak{z}}{p+q},$$

wo $p$ und $q$ die skalaren Gröszen sind.

$$(6)\qquad \vartheta = 2\left(\frac{p\mathfrak{y}+q\mathfrak{z}}{p+q}\,\xi\right)\xi - \frac{p\mathfrak{y}+q\mathfrak{z}}{p+q}$$

ist der zu $\{p\mathfrak{y}+q\mathfrak{z}\} \div \{p+q\}$ in bezug auf den Kreis $\xi$ inverse Kreis.

Aus (6) folgt

$$(7)\qquad \vartheta = \frac{2}{p+q}\,\{p\,(\xi\mathfrak{y})+q\,(\xi\mathfrak{z})\}\,\xi - \frac{p\mathfrak{y}+q\mathfrak{z}}{p+q},$$

daraus ergibt sich

$$(8)\qquad (\xi\vartheta) = \frac{2}{p+q}\,\{p\,(\xi\mathfrak{y}) + q\,(\xi\mathfrak{z})\} - \frac{1}{p+q}\,\{p(\xi\mathfrak{y})+q(\xi\mathfrak{z})\}$$
$$= \frac{1}{p+q}\,\{p\,(\xi\mathfrak{y}) + q\,(\xi\mathfrak{z})\},$$

d. h.

$$(9) \qquad \cos\phi_1 = \frac{1}{p+q}\{p\cos\phi_2 + q\cos\phi_3\},$$

wo $\phi_1$ der Winkel zwischen $\xi$ und $\vartheta$, $\phi_2$ der zwischen $\xi$ und $\mathfrak{y}$, $\phi_3$ der zwischen $\xi$ und $\mathfrak{z}$ ist.

(**M**) Sind $\xi$ und $\bar{\xi}$ zwei Kreise in $R_2$, $\mathfrak{z}$ ein anderer Kreis in $R_2$, so ist

$$(1) \qquad \mathfrak{y} = 2(\mathfrak{z}\xi)\xi - \mathfrak{z}$$

der zu $\mathfrak{z}$ in bezug auf den Kreis $\xi$ inverse Kreis.

Wir betrachten

$$(2) \qquad \mathfrak{x} = 2(\mathfrak{y}\bar{\xi})\bar{\xi} - \mathfrak{y},$$

so folgt aus (1) und (2)

$$(3) \qquad \begin{aligned}\mathfrak{x} &= 2\{2(\mathfrak{z}\xi)\xi - \mathfrak{z}, \bar{\xi}\}\bar{\xi} - \{2(\mathfrak{z}\xi)\xi - \mathfrak{z}\} \\ &= 4(\mathfrak{z}\xi)(\xi\bar{\xi})\bar{\xi} - 2(\mathfrak{z}\bar{\xi})\bar{\xi} - 2(\mathfrak{z}\xi)\xi + \mathfrak{z}.\end{aligned}$$

$\mathfrak{z}$ in (1) transformiert sich in $\mathfrak{x}$ in (3) bei zwei Inversionen (1) und (2).

Aus (3) folgt

$$(4) \qquad \begin{aligned}(\mathfrak{x}\mathfrak{z}) &= 4(\mathfrak{z}\xi)(\xi\bar{\xi})(\mathfrak{z}\bar{\xi}) - 2(\mathfrak{z}\bar{\xi})(\mathfrak{z}\bar{\xi}) - 2(\mathfrak{z}\xi)(\xi\mathfrak{z}) + (\mathfrak{z}\mathfrak{z}), \\ \cos\phi_1 &= 4\cos\phi_2\cos\phi_3\cos\phi_4 - 2\cos^2\phi_4 - 2\cos^2\phi_2 + 1,\end{aligned}$$

wo $\phi_1$ der Winkel zwischen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{z}$, $\phi_2$ der zwischen $\mathfrak{z}$ und $\xi$, $\phi_3$ der zwischen $\xi$ und $\bar{\xi}$, $\phi_4$ der zwischen $\mathfrak{z}$ und $\bar{\xi}$ ist.

(**N**) Wir betrachten eine Kreisschar $\mathfrak{z}(t)$, wo $\mathfrak{z}$ ein Kreis in $R_2$, $t$ ein Parameter ist.

Die Kreise $\mathfrak{z}(t)$ sind die Schmiegkreise der Kurve $\dot{\mathfrak{z}}(t)$, wenn $(\dot{\mathfrak{z}}\dot{\mathfrak{z}}) = 0$ gilt.[1]

Nun betrachten wir die inverse Transformation

$$(1) \qquad \mathfrak{y} = 2(\mathfrak{z}\xi)\xi - \mathfrak{z},$$

(1) THOMSEN, a. a. O., S. 126.

wo $\xi$ ein fester Kreis ist.

Aus (1) folgt

$$(2) \qquad \dot{\mathfrak{y}} = 2(\dot{\mathfrak{z}}\xi)\,\xi - \dot{\mathfrak{z}}$$

und

$$(3) \qquad (\dot{\mathfrak{y}}\dot{\mathfrak{y}}) = \{2(\dot{\mathfrak{z}}\xi)\,\xi - \dot{\mathfrak{z}},\ 2(\dot{\mathfrak{z}}\xi)\,\xi - \dot{\mathfrak{z}}\}$$
$$= 4(\dot{\mathfrak{z}}\xi)^2 + (\dot{\mathfrak{z}}\dot{\mathfrak{z}}) - 4(\dot{\mathfrak{z}}\xi)^2 = (\dot{\mathfrak{z}}\dot{\mathfrak{z}})\,.$$

Aus (3) kann man wissen, wenn $(\dot{\mathfrak{z}}\dot{\mathfrak{z}})=0$, so entstehe

$$(4) \qquad (\dot{\mathfrak{y}}\dot{\mathfrak{y}}) = 0\,.$$

Somit ergibt sich der

**Satz:** *Sind $\mathfrak{z}(t)$ die Schmiegkreise der Kurve $\dot{\mathfrak{z}}(t)$, so sind $\mathfrak{y}(t)$ die Schmiegkreise der Kurve $\dot{\mathfrak{y}}(t)$.*

(**O**) $\xi$, $\eta$ und $\zeta$ seien drei Kreise in $R_2$, so berührt $\zeta$ in

$$(1) \qquad 2\zeta = \xi + (\xi\eta)\,\eta$$

$\xi$ in einem Punkt $\mathfrak{v}$, wo sich $\xi$ und $\eta$ in $\mathfrak{v}$ berühren, denn aus (1) bestehen

$$(2) \qquad \begin{cases} 2(\xi\zeta) = 1 + (\xi\eta)^2, \\ (\zeta\eta) = (\xi\eta)\,, \\ (\xi\eta)^2 = 1\,. \end{cases}$$

$$(3) \qquad \bar{\zeta} = 2(\zeta\xi)\,\xi - \zeta$$

ist der zu $\zeta$ in bezug auf den Kreis $\xi$ inverse Kreis.

Aus (1), (3) folgt

$$(4) \qquad \bar{\zeta} = \{\xi + (\xi\eta)\,\eta,\ \xi\}\,\xi - \zeta$$
$$= \xi + (\xi\eta)^2\,\xi - \zeta = 2\xi - \zeta\,,$$

so kann man wissen, dasz $\bar{\zeta}$ auch $\xi$ berührt.

(**P**) Wenn sich zwei Kreise $\xi$ und $\eta$ in $R_2$ in einem Punkt $\mathfrak{v}$ berühren, so kommt zustande

$$(1) \qquad \mathfrak{v} = \xi - (\xi\eta)\,\eta\,.$$

Berühren zwei Kreise $\xi$ und $\zeta$ sich einander in einem Punkt $\mathfrak{w}$, so folgt

$$(2) \qquad \mathfrak{w} = \xi - (\xi\zeta)\zeta .$$

Aus (1), (2) folgt

$$(3) \qquad (\mathfrak{v}\mathfrak{w}) = -1 + (\eta\zeta),$$

d. h.

$$(4) \qquad 1 + (\mathfrak{v}\mathfrak{w}) = (\eta\zeta).$$

In unserem Falle liegen zwei Punkte $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ auf einem Kreise $\xi$, und zwei Kreise $\zeta$ und $\eta$ berühren einen Kreis $\xi$.

Im reellen Falle ist $(\eta\zeta) \neq 0$ in (4). Man kann also wissen, dasz $\eta$ und $\zeta$ zueinander nicht senkrecht sein können.

Nehmen wir $n$ Punkte

$$\mathfrak{v}_1,\ \mathfrak{v}_2,\ \mathfrak{v}_3,\ \cdots .$$

auf $\xi$ wie in (1), so kommt zustande

$$(5) \qquad \begin{cases} \mathfrak{v}_1 = \xi_1 - (\xi_1\eta_1)\,\eta_1, \\ \mathfrak{v}_2 = \xi_2 - (\xi_2\eta_2)\,\eta_2, \\ \mathfrak{v}_3 = \xi_3 - (\xi_3\eta_3)\,\eta_3, \\ \dots\dots\dots\dots . \end{cases}$$

(2) führt dazu, dasz, wenn

$$(6) \qquad (\mathfrak{y}_1\mathfrak{v}_2) = (\mathfrak{v}_2\mathfrak{v}_3) = \cdots$$

ist, so

$$(7) \qquad (\xi_1\eta_1) = (\xi_2\eta_2) = \cdots$$

folgt.

(**Q**) Wir betrachten zwei Transformationen

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathfrak{y} = 2(\mathfrak{z}\xi)\,\xi - \mathfrak{z}, \\ \mathfrak{x} = \mathfrak{z} - (\mathfrak{z}\xi)\,\xi, \end{cases}$$

so folgt

$$(2) \qquad (\mathfrak{y}\mathfrak{x}) = 0 ,$$

wo $\mathfrak{y}$, $\xi$ und $\mathfrak{z}$ drei Kreise in $R_2$, $\mathfrak{x}$ ein Punkt, $(\mathfrak{z}\xi)^2 = 1$ ist.

Von

$$(3) \qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = \mathfrak{z} - (\mathfrak{z}\bar{\xi})\bar{\xi} , \\ \xi = (\mathfrak{z}\xi)\xi - \mathfrak{z} \end{cases}$$

gilt

$$(4) \qquad (\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = 1 - (\xi\bar{\xi}) ,$$

wo $\bar{\xi}$ der Kreis in $R_2$, $(\mathfrak{z}\bar{\xi}) = (\mathfrak{z}\xi) = 1$ ist.

Wenn $\xi$ und $\bar{\xi}$ zueinander senkrecht sind, so folgt aus (4)

$$(5) \qquad (\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = 0 ,$$

woraus sich der Punkt $\mathfrak{x}$ ergibt, der auf dem Kreis $\mathfrak{y}$ liegt.

(**R**) Wir betrachten

$$(1) \qquad \mathfrak{y} = (\mathfrak{z}\xi)\xi - \mathfrak{z} ,$$

wo $\xi$, $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{y}$ die Kreise in $R_2$ sind.

Aus (1) folgt

$$(2) \qquad (\mathfrak{z}\xi) = 0 ,$$

d. h. $\mathfrak{z}$ und $\xi$ sind zueinander senkrecht.

Aus (1) entsteht

$$(3) \qquad (\mathfrak{z}\mathfrak{y}) = (\mathfrak{z}\xi) - 1 = -1 ,$$

so kann man wissen, dasz $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{y}$ sich einander berühren.

Aus (1) folgt

$$(4) \qquad (\xi\mathfrak{y}) = (\mathfrak{z}\xi) - (\mathfrak{z}\xi) = 0 ;$$

man kann daraus wissen, dasz $\xi$ und $\mathfrak{y}$ zueinander senkrecht sind.

(**S**) Wir betrachten

$$(1) \qquad \mathfrak{y} = 2(\mathfrak{z}\xi)\xi - \mathfrak{z} ,$$

wo $\xi$, $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{y}$ die Kreise in $R_2$ sind.

Ist $\eta$ ein Kreis in $R_2$, so folgt aus (1)

( 2 ) $(\mathfrak{y}\eta) = 2(\mathfrak{z}\xi)(\eta\xi) - (\mathfrak{z}\eta)$.

Sind $\mathfrak{z}$ und $\eta$ zueinander senkrecht, so entsteht

( 3 ) $(\mathfrak{y}\eta) = 2(\eta\xi)(\xi\eta)$,

daraus ergibt sich

( 4 ) $\cos\phi_1 = 2\cos\phi_2 \cdot \cos\phi_3$,

wo $\phi_1$ der Winkel zwischen $\mathfrak{y}$ und $\eta$, $\phi_2$ der zwischen $\mathfrak{z}$ und $\xi$, $\phi_3$ der zwischen $\xi$ und $\eta$ ist.

(T) Wir betrachten die Kreisscharen

( 1 ) $\lambda\mathfrak{x} + \mu\mathfrak{y}$

und

( 2 ) $l\mathfrak{z} + m\mathfrak{w}$,

wo $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{w}$ die Kreise in $R_2$, $\lambda$, $\mu$, $l$ und $m$ die skalaren Grössen sind.

$\theta$ in

( 3 ) $\cos\theta = (\lambda\mathfrak{x} + \mu\mathfrak{y},\ l\mathfrak{z} + m\mathfrak{w})$

bezeichnet den Winkel zwischen (1) und (2).

Aus (3) folgt

( 4 ) $\cos\theta = \lambda l(\mathfrak{x}\mathfrak{z}) + \lambda m(\mathfrak{x}\mathfrak{w}) + \mu l(\mathfrak{y}\mathfrak{z}) + \mu m(\mathfrak{y}\mathfrak{w})$.

Wenn für alle Werte von $\lambda$, $\mu$, $l$ und $m$ $\theta = \pi/2$ in (4) ist, so folgt

( 5 ) $(\mathfrak{x}\mathfrak{z}) = 0,\ (\mathfrak{x}\mathfrak{w}) = 0,\ (\mathfrak{y}\mathfrak{z}) = 0,\ (\mathfrak{y}\mathfrak{w}) = 0$,

d. h.

( 6 ) $\mathfrak{x} \perp \mathfrak{z},\ \mathfrak{x} \perp \mathfrak{w},\ \mathfrak{y} \perp \mathfrak{z},\ \mathfrak{y} \perp \mathfrak{w}$.

(U)

( 1 ) $\mathfrak{z} = \| \mathfrak{z}^{\mathrm{I}}, \mathfrak{z}^{\mathrm{II}}, \dot{\mathfrak{z}}^{\mathrm{I}}, \dot{\mathfrak{z}}^{\mathrm{II}} \|$

bedeutet die gemeinsame Orthogonalkugel beider Kreise $\{\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}, \dot{\mathfrak{x}}^{\mathrm{I}}\}$ und $\{\mathfrak{x}^{\mathrm{II}}, \dot{\mathfrak{x}}^{\mathrm{II}}\}$, wo $\mathfrak{x}_{\mathrm{I}}$ und $\mathfrak{x}^{\mathrm{II}}$ die Kugeln in $R_3$ sind.

Sie schrumpft für sich schneidende Kreise auf einen Punkt zusammen, wenn

( 2 ) $$(\mathfrak{z}\mathfrak{z}) = (\,\|\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}, \mathfrak{x}^{\mathrm{II}}, \dot{\mathfrak{x}}^{\mathrm{I}}, \dot{\mathfrak{x}}^{\mathrm{II}}\| \cdot \|\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}, \mathfrak{x}^{\mathrm{II}}, \dot{\mathfrak{x}}^{\mathrm{I}}, \dot{\mathfrak{x}}^{\mathrm{II}}\|\,) = 0\,.$$

Von

( 3 ) $$\begin{cases} \mathfrak{z} = \|\,\mathfrak{x}^{\mathrm{I}},\ \mathfrak{x}^{\mathrm{II}},\ \bar{\mathfrak{x}}^{\mathrm{I}},\ \bar{\mathfrak{x}}^{\mathrm{II}}\,\|, \\ \mathfrak{z} = \|\,\mathfrak{x}\cdot\ \dot{\mathfrak{x}},\ \ddot{\mathfrak{x}}\cdot\ \dddot{\mathfrak{x}}\,\|, \\ \mathfrak{z} = \|\,\mathfrak{x}^{\mathrm{I}},\ \mathfrak{x}^{\mathrm{II}},\ \mathfrak{y}^{\mathrm{I}},\ \mathfrak{y}^{\mathrm{II}}\,\|, \end{cases}$$

u. s. w.

gilt das gleiche, wo die Inversionstransformation

( 4 ) $$\begin{cases} \mathfrak{y}^{\mathrm{I}} = 2\,(\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}\xi)\,\xi - \mathfrak{x}^{\mathrm{I}}, \\ \mathfrak{y}^{\mathrm{II}} = 2\,(\mathfrak{x}^{\mathrm{II}}\xi) - \mathfrak{x}^{\mathrm{II}} \end{cases}$$

gilt, wo $\xi$ eine feste Kugel ist.

(**V**) Wir betrachten drei Kugeln

$$_{(i)}\mathfrak{x}\,(t) \qquad (i=0,\,1,\,2,\,3)$$

in $R_3$, so folgt

( 1 ) $$(_{(i)}\mathfrak{x}\,_{(j)}\mathfrak{x}) = \delta_{ij}$$

wobei $\delta_{ij} = 1$ oder 0 ist, je nachdem $i = j$ oder $i \neq j$ ist, wo $t$ ein Parameter ist.

( 2 ) $$(_{(i)}\dot{\mathfrak{x}}\,_{(j)}\mathfrak{x}) = -\,(_{(j)}\dot{\mathfrak{x}}\,_{(i)}\mathfrak{x}),$$

wo $\dot{\mathfrak{x}} = d\mathfrak{x}/dt$ ist.

Nun betrachten wir

( 3 ) $$\mathrm{I} \equiv (_{(0)}\dot{\mathfrak{x}}\,_{(1)}\mathfrak{x})\,(_{(0)}\dot{\mathfrak{x}}\,_{(2)}\mathfrak{x})\,(_{(0)}\dot{\mathfrak{x}}\,_{(3)}\mathfrak{x})$$

und

( 4 ) $$\mathrm{J} \equiv (_{(1)}\dot{\mathfrak{x}}\,_{(0)})\,(_{(2)}\dot{\mathfrak{x}}\,_{(0)})\,(_{(3)}\dot{\mathfrak{x}}\,_{(0)}\mathfrak{x}),$$

wo $$\mathrm{I} = \mathrm{J}\,.$$

( 5 ) $$_{(i)}\mathfrak{y} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}\,_{(k)}\mathfrak{x} \qquad (i=1,\,2,\,3).$$

bezeichnet drei Kugeln, die die zwei Schnittpunkte von ${}_{(1)}\mathfrak{x}$, ${}_{(2)}\mathfrak{x}$, ${}_{(3)}\mathfrak{x}$ hindurchgehen.

Aus (5) folgt

$$(6)\qquad \begin{aligned}&({}_{(1)}\dot{\mathfrak{y}}\;{}_{(0)}\mathfrak{x})\,({}_{(2)}\dot{\mathfrak{y}}\;{}_{(0)}\mathfrak{x})\,({}_{(3)}\dot{\mathfrak{y}}\;{}_{(0)}\mathfrak{x})\\ &=|a_{ik}|\,({}_{(1)}\dot{\mathfrak{x}}\;{}_{(0)}\mathfrak{x})\,({}_{(2)}\dot{\mathfrak{x}}\;{}_{(0)}\mathfrak{x})\,({}_{(3)}\dot{\mathfrak{x}}\;\mathfrak{x}_{(0)}),\end{aligned}$$

d. h.

$$(7)\qquad \cdot\, J=\frac{({}_{(1)}\dot{\mathfrak{y}}\;{}_{(0)}\mathfrak{x})\,({}_{(2)}\dot{\mathfrak{y}}\;{}_{(0)}\mathfrak{x})\,({}_{(3)}\dot{\mathfrak{y}}\;{}_{(0)}\mathfrak{x})}{|a_{ik}|},$$

so folgt

$$\cos\phi_1\cos\phi_2\cos\phi_3=|a_{ik}|\cos\psi_1\cos\psi_3\cos\psi_3,$$

wo $\phi_i$ der Winkel zwischen ${}_{(i)}\dot{\mathfrak{y}}$ und ${}_{(0)}\mathfrak{x}$, $\psi_i$ der zwischen ${}_{(i)}\dot{\mathfrak{x}}$ und ${}_{(0)}\mathfrak{x}$ ist.

Weiter kann man I mit $\mathfrak{y}$ berechnen.

(**W**) Wir betrachten

$$(1)\qquad \begin{cases}{}_{(0)}\mathfrak{z}=\cos{}_{(0)}t\cdot{}_{(0)}\mathfrak{x}(\sigma)+\sin{}_{(0)}t\cdot{}_{(1)}\mathfrak{x}(\sigma),\\ {}_{(1)}\mathfrak{z}=\cos{}_{(1)}t\cdot{}_{(1)}\mathfrak{x}(\sigma)+\sin{}_{(1)}t\cdot{}_{(1)}\mathfrak{x}(\sigma),\end{cases}$$

wo ${}_{(i)}\mathfrak{z}$, ${}_{(i)}\mathfrak{x}$ die Kreise in $R_2$, ${}_{(i)}t$ der Parameter ist.

Aus (1) kommt zustande

$$(2)\qquad \begin{cases}{}_{(0)}\dot{\mathfrak{z}}=\cos{}_{(0)}t\cdot{}_{(0)}\dot{\mathfrak{x}}+\sin{}_{(0)}t\cdot{}_{(1)}\dot{\mathfrak{x}}+\{-\sin{}_{(0)}t\cdot{}_{(0)}\mathfrak{x}+\cos{}_{(0)}t\cdot{}_{(1)}\mathfrak{x}\},\\ {}_{(1)}\dot{\mathfrak{z}}=\cos{}_{(1)}t\cdot{}_{(1)}\dot{\mathfrak{x}}+\sin{}_{(1)}t\cdot{}_{(1)}\dot{\mathfrak{x}}+\{-\sin{}_{(1)}t\cdot{}_{(0)}\mathfrak{x}+\cos{}_{(1)}t\cdot{}_{(1)}\mathfrak{x}\},\end{cases}$$

wo $\sigma$ in THOMSENS Arbeit[1] steht und wo wir die Ableitungen nach $t$ mit dem Punkte bezeichnen.

Sind ${}_{(2)}\mathfrak{x}$, ${}_{(3)}\mathfrak{x}$ zwei Kreise, die zu ${}_{(0)}\mathfrak{x}$, ${}_{(1)}\mathfrak{x}$ in $R_2$ senkrecht sind, so entsteht aus (2)

$$(3)\qquad \begin{cases}({}_{(0)}\dot{\mathfrak{z}}\;{}_{(2)}\mathfrak{x})=\cos{}_{(0)}t\,({}_{(0)}\dot{\mathfrak{x}}\;{}_{(2)}\mathfrak{x})+\sin{}_{(0)}t\,({}_{(1)}\dot{\mathfrak{x}}\;{}_{(2)}\mathfrak{x}),\\ ({}_{(1)}\dot{\mathfrak{z}}\;{}_{(2)}\mathfrak{x})=\cos{}_{(1)}t\,({}_{(0)}\dot{\mathfrak{x}}\;{}_{(2)}\mathfrak{x})+\sin{}_{(1)}t\,({}_{(1)}\dot{\mathfrak{x}}\;{}_{(2)}\mathfrak{x}),\\ ({}_{(0)}\dot{\mathfrak{z}}\;{}_{(3)}\mathfrak{x})=\cos{}_{(0)}t\,({}_{(0)}\dot{\mathfrak{x}}\;{}_{(3)}\mathfrak{x})+\sin{}_{(0)}t\,({}_{(1)}\dot{\mathfrak{x}}\;{}_{(3)}\mathfrak{x}),\\ ({}_{(1)}\dot{\mathfrak{z}}\;{}_{(3)}\mathfrak{x})=\cos{}_{(1)}t\,({}_{(0)}\dot{\mathfrak{x}}\;{}_{(3)}\mathfrak{x})+\sin{}_{(1)}t\,({}_{(1)}\dot{\mathfrak{x}}\;{}_{(3)}\mathfrak{x}).\end{cases}$$

(1) THOMSEN, G.: Über konforme Geo. II, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ. 4, S. 132.

Aus (3) kann man $\cos_{(4)} t$, $\sin_{(4)} t$ eliminieren, wo zwischen $\cos_{(4)}\varphi$, $\cos_{(4)}\psi$ eine Relation gilt, wo $_{(4)}\varphi$ der Winkel zwischen $_{(4)}\dot{\mathfrak{x}}$ und $_{(3)}\mathfrak{x}$, $\psi$ der zwischen $_{(4)}\dot{\mathfrak{z}}$ und $_{(3)}\mathfrak{x}$ ist.

(X) Ist $\mathfrak{x}$ eine Kugel, die den Schnittpunkt von zwei Kugeln $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ in $R_3$ hindurchgeht, so entsteht

$$(1) \qquad \mathfrak{x} = A\mathfrak{y} + B\mathfrak{z},$$

wo A und B die skalaren Gröszen sind.

Aus (1) entsteht

$$(2) \qquad \begin{cases} (\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = A + B(\mathfrak{y}\mathfrak{z}), \\ (\mathfrak{x}\mathfrak{z}) = A(\mathfrak{y}\mathfrak{z}) + B. \end{cases}$$

Eliminieren wir A und B zwischen (1), (2) und (3), so folgt

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{x} & \mathfrak{y} & \mathfrak{z} \\ (\mathfrak{x}\mathfrak{y}) & 1 & (\mathfrak{y}\mathfrak{z}) \\ (\mathfrak{x}\mathfrak{z}) & (\mathfrak{y}\mathfrak{z}) & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

d. h.

$$(4) \qquad \mathfrak{x}\,\{1-(\mathfrak{y}\mathfrak{z})^2\} + \mathfrak{y}\,\{(\mathfrak{x}\mathfrak{y})-(\mathfrak{y}\mathfrak{z})(\mathfrak{x}\mathfrak{z})\} + \mathfrak{z}\,\{(\mathfrak{x}\mathfrak{y})(\mathfrak{y}\mathfrak{z})-(\mathfrak{x}\mathfrak{z})\} = 0,$$

oder

$$\sin^2\phi_1 \cdot \mathfrak{x} + \mathfrak{y}\,\{\cos\phi_2 - \cos\phi_1\cos\phi_3\} + \mathfrak{z}\,\{\cos\phi_2\cos\phi_1 - \cos\phi_3\} = 0,$$

wo $\phi_1$ der Winkel zwischen $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$, $\phi_2$ der zwischen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, $\phi_3$ der zwischen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{z}$ ist.

## (4)

(A) Wir betrachten

$$(1) \qquad \cos^2\varphi = T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta$$

wieder.[1]

(1) NAKAZIMA, S.: Differentialgeo. der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ., Vol. 34, p. 196.

$$(2) \qquad \mathfrak{K},\ \overline{\mathfrak{K}},\ \overline{\overline{\mathfrak{K}}},\ \ldots$$

in $R_3$ gegeben sind, so entsteht zwischen $\{\mathfrak{K}\overline{\mathfrak{K}}\}$, $\{\overline{\mathfrak{K}}\overline{\overline{\mathfrak{K}}}\}$, ...

$$(3) \qquad \cos^2\varphi = T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta\,, \quad \cos^2\overline{\varphi} = \overline{\overline{T}}\rho_\alpha\rho_\beta\,, \ \ldots .$$

Aus (3) kann man wissen, dasz die notwendige und hinreichende Bedingung für die Gleichung

$$(4) \qquad \cos^2\varphi = \cos^2\overline{\varphi} = \ldots .$$

$$(5) \qquad T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta = \overline{\overline{T}}^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta = \ldots$$

ist.

Weiter gilt

$$(6) \qquad \cos^2(\varphi + \overline{\varphi} + \ldots) = \{T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta\}\cdot\{\overline{T}^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta)\}\ \ldots,$$

wenn

$$\varphi < \pi/2\,, \quad \overline{\varphi} < \pi/2\,, \ldots .$$

(**B**) Wir betrachten

$$(1) \qquad \begin{cases} A^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta = 1\,, \\ \cos^2\varphi - k = (T^{\alpha\beta} - kA^{\alpha\beta})\,\rho_\alpha\rho_\beta\,, \end{cases}$$

und setzen (1) in die Form

$$(2) \qquad \begin{cases} g(x,y) = A^{11}x^2 + 2A^{12}xy + A^{22}y^2 - 1 = 0\,, \\ f(x,y) = (T^{11}-kA^{11})\,x^2 + 2\,(T^{12}-kA^{12})\,xy + (T^{22}-kA^{22})\,y^2, \end{cases}$$

wo $\rho^{\mathrm{I}} = x$, $\rho^{\mathrm{II}} = y$, $k =$ die Funktion von $n^{\text{ter}}$ Ordnung in $x$, $y$ ist.

Setzen wir

$$(3) \qquad \begin{cases} p \equiv \partial f/\partial x = 2\,\{(T^{1} - kA^{11})\,x + (T^{12} - kA^{12})\,y\}\,, \\ q \equiv \partial f/\partial y = 2\,\{(T^{12} - kA^{12})\,x + (T^{22} - kA^{22})\,y\}\,, \\ p_1 \equiv \partial g/\partial x = 2\,(A^{11}x + A^{12}y)\,, \\ q_1 \equiv \partial g/\partial y = 2\,(A^{12}x + A^{22}y)\,, \end{cases}$$

so folgt aus

$$(4) \qquad j \equiv pq_1 - pq_1 = 0$$

$$(5) \qquad j \equiv 4\{[(T^{11}-kA^{11})x+(T^{12}-kA^{12})y][A^{12}x+A^{22}y] - [(T^{12}-kA^{12})x+(T^{22}-kA^{22})y][A^{11}x+A^{12}y]\}=0.$$

Somit[1] ergibt sich der

**Satz:** *Die Anzahl des Maximums und Minimums von*

$$\{\cos^2\varphi - k(x,y)\}$$

*ist* $2(n+1)$.

(**C**) In $R_3$ sei $\mathfrak{K}$ ein Kreis und K eine Kugel.

Wir nehmen an, dasz sich $\mathfrak{K}$ und K in P schneiden.

Liegt ein Vektor $\mathfrak{y}$ in P nach der Tangente von $\mathfrak{K}$, so bezeichnet

$$(1) \qquad \mathfrak{y}\cdot\sqrt{\frac{T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\alpha}{A^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta}}$$

die Projektion von $\mathfrak{y}$ auf der Tangentenebene E durch K.

Liegt ein Vektor $\mathfrak{x}$ auf E von einem Punkt 0 bis P, so wird die Projektion $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{x}+\mathfrak{y}$ auf E mit

$$(2) \qquad \mathfrak{z}=\mathfrak{x}+\mathfrak{y}\cdot\sqrt{\frac{T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta}{A^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta}}$$

bezeichnet.

(**D**) Gelten

$$(1) \qquad \cos^2\varphi=-\mu/\lambda, \quad \cos^2\varphi=-\rho/\nu$$

in

$$(2) \qquad \cos^2\varphi=\frac{T^{11}\rho_1^2+2T^{12}\rho_1\rho_2+T^{22}\rho_2^2}{A^{11}\rho_1^2+2A^{12}\rho_1\rho_2+A^{22}\rho_2^2},$$

so folgt

$$(3) \qquad \begin{cases}(\lambda T^{11}+\mu A^{11})\rho_1^2+2(\lambda T^{12}+\mu A^{12})\rho_1\rho_2+(\lambda T^{22}+\mu A^{22})\rho_2^2=0,\\(\nu T^{11}+\rho A^{11})\rho_1^2+2(\nu T^{12}+\rho A^{12})\rho_1\rho_2+(\nu T^{22}+\rho A^{22})\rho_2^2=0,\end{cases}$$

wo $\lambda$, $\mu$, $\rho$, $\nu$ die Konstanten sind.

(1) Vergl. NAKAZIMA, S.: Differentialgeo. der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ. 34, S. 205.

Man kann also wissen, dasz (3) im allgemeinen nicht gleichzeitig gilt, wenn

$$\mu/\lambda \neq \rho/\nu$$

ist.

(**E**) Die Minimallinien auf der Kreisfläche ($k$) sind

$$(1) \qquad (\theta_t\theta_t)\,dt^2 + 2\,(\theta_t\theta_\tau)\,dtd\tau + (\theta_\tau\theta_\tau)\,d\tau^2 = 0\,.$$

Nun nehmen wir

$$(2) \qquad \mathrm{A}dt^2 + 2\,\mathrm{B}dtd\tau + \mathrm{C}d\tau^2 = 0$$

als Krümmungslinien auf ($k$), so bezeichnen

$$(3) \qquad \begin{cases} \{\lambda\mathrm{A} + \mu(\theta_t\theta_t)\}\,dt^2 + 2\,\{\lambda\mathrm{B} + \mu(\theta_t\theta_\tau)\}\,dtd\tau \\ \qquad + \{\lambda\mathrm{C} + \mu(\theta_\tau\theta_\tau)\}\,d\tau^2 = 0\,, \\ \{\nu\mathrm{A} + \rho(\theta_t\theta_t)\}\,dt^2 + 2\,\{\nu\mathrm{B} + \rho(\theta_t\theta_\tau)\}\,dtd\tau \\ \qquad + \{\nu\mathrm{C} + \rho(\theta_\tau\theta_\tau)\}\,d\tau^2 = 0 \end{cases}$$

$2\,\infty^2$ Kurven auf ($k$).

Wenn

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{\lambda\mathrm{A} + \mu(\theta_t\theta_t)}{\alpha} = \dfrac{\lambda\mathrm{B} + \mu(\theta_t\theta_\tau)}{\beta} = \dfrac{\lambda\mathrm{C} + \mu(\theta_\tau\theta_\tau)}{\gamma} \\[2ex] \dfrac{\nu\mathrm{A} + \rho(\theta_t\theta_t)}{\alpha} = \dfrac{\nu\mathrm{B} + \rho(\theta_t\theta_\tau)}{\beta} = \dfrac{\nu\mathrm{C} + \rho(\theta_\tau\theta_\tau)}{\gamma} \end{cases}$$

gelten, so fallen $2\,\infty^2$ Kurven (3) mit

$$(5) \qquad \alpha dt^2 + 2\,\beta dtd\tau + \gamma d\tau^2 = 0$$

zusammen, wo A, B, C, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Funktionen von $t$, $\tau$ sind.

Wenn

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{\overline{\lambda}\overline{\mathrm{A}} + \overline{\mu}(\overline{\theta_t\theta_t})}{\lambda\mathrm{A} + \mu(\theta_t\theta_t)} = \dfrac{\overline{\lambda}\overline{\mathrm{B}} + \overline{\mu}(\overline{\theta_t\theta_\tau})}{\lambda\mathrm{B} + \mu(\theta_t\theta_\tau)} = \dfrac{\overline{\lambda}\overline{\mathrm{C}} + \overline{\mu}(\overline{\theta_\tau\theta_\tau})}{\lambda\mathrm{C} + \mu(\theta_\tau\theta_\tau)}\,, \\[2ex] \dfrac{\overline{\nu}\overline{\mathrm{A}} + \overline{\rho}(\overline{\theta_t\xi_t})}{\nu\mathrm{A} + \rho(\theta_t\theta_t)} = \dfrac{\overline{\iota}\overline{\mathrm{B}} + \overline{\rho}(\overline{6_t\theta_\tau})}{\nu\mathrm{B} + \rho(\theta_t\theta_\tau)} = \dfrac{\overline{\nu}\overline{\mathrm{C}} + \overline{\rho}(\overline{\theta_\tau\theta_\tau})}{\nu\mathrm{C} + \rho(\theta_\tau\theta_\tau)} \end{cases}$$

gelten, so korrespondieren $2\,\infty^1$ Kurvenscharen

$$(7)\quad \begin{cases} \{\lambda A + \mu(\theta_t\theta_t)\}\, dt^2 + 2\,\{\lambda B + \mu(\theta_t\theta_\tau)\}\, dtd\tau \\ \qquad + \{\lambda C + \mu(\theta_\tau\theta_\tau)\}\, d\tau^2, \\ \{\nu A + \rho(\theta_t\theta_t)\}\, dt^2 + 2\,\{\nu B + \rho(\theta_t\theta_\tau\}\, dtd\tau \\ \qquad + \{\nu C + \rho(\theta_\tau\theta_\tau)\}\, d\tau^2, \end{cases}$$

die der Involution gehören, welche von den Gleichungen

$$(8)\qquad A dt^2 + 2\,B dtd\tau + C d\tau^2 = 0$$

$$(9)\qquad (\theta_t\theta_t)\, dt^2 + 2\,(\theta_t\theta_\tau)\, dtd\tau + (\theta_\tau\theta_\tau)\, d\tau^2 = 0$$

auf $(k)$ bestimmt wird, den Kurvenscharen

$$(10)\qquad \{\bar\lambda\bar A + \bar\mu(\overline{\theta_t\theta_t})\}\, dt^2 + 2\,\{\bar\lambda\bar B + \bar\mu(\overline{\theta_t\theta_\tau})\}\, dtd\tau + \{\bar\lambda\bar C + \bar\mu(\overline{\theta_\tau\theta_\tau})\}\, d\tau^2 = 0$$

bzw.

$$(11)\qquad \{\bar\nu\bar A + \bar\rho(\overline{\theta_t\theta_t})\}\, dt^2 + 2\,\{\bar\nu\bar B + \bar\rho(\overline{\theta_t\theta_\tau})\}\, dtd\tau + \{\bar\nu\bar C + \bar\rho(\overline{\theta_\tau\theta_\tau})\}\, d\tau^2 = 0$$

welche der Involution, die von den Gleichungen

$$(12)\qquad \begin{cases} \bar A\, dt^2 + 2\,\bar B\, dtd\tau + \bar C\, d\tau^2 = 0 \\ (\overline{\theta_t\theta_t})\, dt^2 + 2\,(\overline{\theta_t\theta_\tau})\, dtd\tau + (\overline{\theta_\tau\theta_\tau})\, d\tau^2 = 0 \end{cases}$$

auf $(\bar k)$ bestimmt wird, gehören.

(**F**) Wir betrachten

$$(1)\qquad \begin{cases} \sum dx_i dy_i = G_{ij}\, du^i du^j, \\ \sum (dx_i)^2 = g_{ij}\, du^i du^j, \\ \sum (dy_i)^2 = \bar g_{ij}\, du^i du^j \end{cases}$$

wieder,[1] wo $dx_i$, $dy_i$ zwei gegebene Fortschreitungsrichtungen bedeuten.

Ihr Winkel $\theta$ wird gegeben durch

$$(2)\qquad \cos^2\theta = \frac{(G_{ij}du^i du^j)^2}{(g_{ij}du^i du^j)(\bar g_{ij}du^i du^j)}.$$

(1) NAKAZIMA, S.: Differentialgeo. der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ. 34, p. 191.

Aus (2) folgt

$$(3)\qquad \tan^2\theta = \frac{(g_{ij}du^i du^j)(\bar{g}_{ij}du^i du^j) - (G_{ij}du^i du^j)^2}{(G_{ij}du^i du^j)^2}.$$

Nun setzen wir (3) wie folgendes[1]

$$(4)\qquad \tan^2\theta = \frac{(E_{ik}du^i du^k)^2}{(G_{ij}du^i du^k)^2}.$$

Betrachten wir (19), (20), (21), (22), (23), (24), (25) in THOMSENS Arbeit,[2] so kann man vier Grundtensoren $G_{ik}$, $P_{ik}$, $C_{ik}$, $E_{ik}$ finden.

(**G**) Wir sehen, dasz in dem Falle

$$(1)\qquad \mathfrak{x}\mathfrak{y} = 0, \quad \mathfrak{x}\delta\mathfrak{y} = 0$$

gelten, wo $\mathfrak{x}(u^1, u^2)$ eine Kugel, $\mathfrak{y}$ ein Punkt im $R_3$ und $u^i$ Parameter sind.

So kann man setzen[3]

$$(2)\qquad \mathfrak{x} = \frac{c_{ik}\delta u^i \delta u^k}{A_{ik}\delta u^i \delta u^k}\cdot\mathfrak{y}.$$

Berühren zwei Kugeln $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{x}$ sich einander in einem Punkt $\mathfrak{y}$, so entsteht

$$(3)\qquad \mathfrak{y} = \mathfrak{x} - (\mathfrak{x}\mathfrak{z})\,\mathfrak{z}, \quad (\mathfrak{x}\mathfrak{z})^2 = 1.$$

Aus (2) und (3) folgt

$$(4)\qquad \frac{A_{ik}\delta u^i \delta u^k}{c_{ik}\delta u^i \delta u^k}\,\mathfrak{x} = \mathfrak{x} - (\mathfrak{x}\mathfrak{z})\,\mathfrak{z}, \quad (\mathfrak{x}\mathfrak{z})^2 = 1.$$

(**H**) Bezeichnet man mit $\mathfrak{x}(u^1, u^2)$ die Kugeln in $R_n$, dann zeigt $\mathfrak{x}+d\mathfrak{x}$ die benachbarten Kugeln, also kommt zustande

$$(1)\qquad (\mathfrak{x} + \delta\mathfrak{x})^2 = 1,$$

(1) THOMSEN, G.: Grundlagen der konformen Flächentheorie, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ. 3, S. 41.

(2) THOMSEN, a, a. O., S. 39.

(3) BLASCHKE, W.: Beiträge zur Flächentheorie, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ. 4, S. 3.

d. h.

$$(2) \qquad (\partial \mathfrak{x})^2 = 0,$$

denn aus $(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = 1$ folgt

$$(3) \qquad \mathfrak{x} \cdot \partial \mathfrak{x} = 0.$$

Wir setzen (2) in die Form

$$(4) \qquad \partial \mathfrak{x}^2 = A_{ik} \partial u^i \partial u^k = 0.$$

Aus der Annahme (4) folgt durch die Ableitung

$$(5) \qquad \partial \mathfrak{x} \cdot \partial^2 \mathfrak{x} = A_{ik} \partial u^i \partial^2 u^k = 0,$$

da nach Lemma RICCIS $A_{ikl} = 0$ ist.

Aus (3) folgt

$$(6) \qquad \partial \mathfrak{x} \cdot \partial \mathfrak{x} + \mathfrak{x} \partial^2 \mathfrak{x} = 0,$$

so kann man (6) folgendermaszen setzen

$$(7) \qquad A_{ik} \partial u^i \partial u^k + \mathfrak{x} \partial^2 \mathfrak{x} = 0,$$

man kann so setzen

$$(8) \qquad \mathfrak{x} \partial^2 \mathfrak{x} = - A_{ik} \partial u^i \partial u^k.$$

## ( 5 )

Die folgenden Zeilen bilden eine Fortsetzung der in dieser Zeitschrift erschienenen Arbeit[1] „Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (IX)“, deren Kenntnis daher vorausgesetzt wird.

Wir betrachten zwei Strecken S und $\tilde{S}$, die durch die beiden Punktpaare $\mathfrak{x}^\alpha$ und $\tilde{\mathfrak{x}}^\lambda$ $[\alpha, \lambda = \mathrm{I}, \mathrm{II}]$ dargestellt sind.

Wir definieren

$$(1) \qquad A^{\alpha\beta} = (\mathfrak{x}^\alpha \mathfrak{x}^\beta), \qquad \tilde{A}^{\lambda\mu} = (\tilde{\mathfrak{x}}^\lambda \tilde{\mathfrak{x}}^\mu)$$

mit

(1) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (IX), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ. Vol. X. (1934), p. 118.

$$(2) \qquad A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha}, \qquad \tilde{A}^{\lambda\mu} = \tilde{A}^{\mu\lambda}$$

und setzen

$$(3) \qquad A = |A^{\alpha\beta}| > 0, \qquad \tilde{A} = |\tilde{A}^{\lambda\mu}| > 0$$

voraus.

Dann haben wir für S, $\tilde{S}$ die Transformationen

$$(4) \qquad \begin{cases} \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha} = c^{\alpha}_{\beta}\, \mathfrak{x}^{\beta} & [\alpha, \beta = \mathrm{I}, \mathrm{II}]. \\ \overset{*}{\tilde{\mathfrak{x}}}{}^{\lambda} = \tilde{c}^{\lambda}_{\mu}\, \tilde{\mathfrak{x}}^{\mu} & [\lambda, \mu = \mathrm{I}, \mathrm{II}] \end{cases}$$

zu berücksichtigen, wo

$$(5) \qquad |c^{\alpha}_{\beta}| \neq 0, \qquad |\tilde{c}^{\lambda}_{\mu}| \neq 0$$

sind.

Es ist jetzt mit unseren Untersuchungen wie mit (2) in dieser Zeitschrift.

Weiter kann man untersuchen wie in meiner Arbeit.[1]

(1) Vgl. NAKAZIMA, S.: Kugelgeometrie von MÖBIUS, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ. Vol. 2, p. 12.

# BEITRÄGE ZUR GEOMETRIE DER KREISE UND KUGELN (XXV)

Sôzi MATUMURA

(Accepted for publication, April 23, 1938.

Im folgenden mögen wir einige sätze über Kreise und Kugeln mitteilen.

## ( 1 )

Zunächst betrachten wir die Kreise in $R_2$.

(**A**) Sind $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die Kreise, so bezeichnet $\xi$ in

$$(1) \qquad \xi = \mathfrak{x} \cdot \cos\alpha + \mathfrak{y} \cdot \sin\alpha$$

auch die Kreise, wo $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ zueinander senkrecht sind.

Aus (1) entsteht

$$(2) \qquad \left(\frac{d\xi}{dt}\frac{d\xi}{dt}\right) = \left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)\cos^2\alpha + \left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\frac{d\mathfrak{y}}{dt}\right)\sin 2\alpha + \left(\frac{d\mathfrak{y}}{dt}\frac{d\mathfrak{y}}{dt}\right)\sin^2\alpha.$$

Wenn

$$(3) \qquad \left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\frac{d\mathfrak{y}}{dt}\right) = 0, \quad \left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right) = 0, \quad \left(\frac{d\mathfrak{y}}{dt}\frac{d\mathfrak{y}}{dt}\right) = 0$$

in (2) gelten, so folgt

$$(4) \qquad \left(\frac{d\xi}{dt}\frac{d\xi}{dt}\right) = 0,$$

wo $t$ in THOMSENS Arbeit[(1)] steht.

[Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ. Formosa, Japan, Vol. XXI, No. 4, June, 1938.]

(1) THOMSEN, G.: Über konforme Geometrie, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ., Vol. 4 (1925), S. 125.

Somit haben wir den folgenden

**Satz:** *Wenn die Scharen $\mathfrak{x}$ bzw. $\mathfrak{y}$ die konsekutiven Kreise berühren, so berühren $\mathfrak{z}$ sich auch, wo $\dot{\mathfrak{x}}$ und $\dot{\mathfrak{y}}$ zueinander senkrecht sind.*

Wir betrachten

$$(1) \qquad \mathfrak{z}(u,v) = \cos\alpha\cdot\mathfrak{x}(n,v) + \sin\alpha\cdot\mathfrak{y}(u.v),$$

wo $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Kreise in $R_2$, $\alpha$ eine Konstante ist und $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ zueinander senkrecht sind.

Aus (1) folgt

$$(2) \qquad \begin{cases} \delta\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_u\,\delta u + \mathfrak{z}_v\delta v\,, \\ \mathfrak{z}_u = \cos\alpha\cdot\mathfrak{x}_u + \sin\alpha\cdot\mathfrak{y}_u\,, \\ \mathfrak{z}_v = \cos\alpha\cdot\mathfrak{x}_v + \sin\alpha\cdot\mathfrak{y}_v\,, \end{cases}$$

daraus bekommen wir

$$(3) \qquad \delta\mathfrak{z} = \cos\alpha\,\mathfrak{x}_u\delta u + \sin\alpha\,\mathfrak{y}_u\delta u + \cos\alpha\,\mathfrak{x}_v\delta v + \sin\alpha\,\mathfrak{x}_v\delta v.$$

Wenn die Kreise $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ den Kreis $\delta\mathfrak{z}$ berühren, so folgt

$$(4') \qquad (\mathfrak{v}\delta\mathfrak{z}) = 0\,, \qquad (\mathfrak{w}\delta\mathfrak{z}) = 0$$

d. h.

$$(5) \qquad \begin{cases} (\mathfrak{v}\mathfrak{z}_u)\,\delta u + (\mathfrak{v}\mathfrak{z}_v)\,\delta v = 0\,, \\ (\mathfrak{w}\mathfrak{z}_u)\,\delta u + (\mathfrak{w}\mathfrak{z}_v)\,\delta v = 0\,, \end{cases}$$

so folgt

$$(6) \qquad (\mathfrak{v}\mathfrak{z}_u):(\mathfrak{w}\mathfrak{z}_u) = (\mathfrak{v}\mathfrak{z}_v):(\mathfrak{w}\mathfrak{z}_v)\,,$$

wo (3) gilt.

(6) *ist unsere Bedingung.*

(**B**) Wir betrachten $m$ Kugeln

$$\mathfrak{x}_1\,,\ \mathfrak{x}_2\,,\ \cdots,\ \mathfrak{x}_m$$

in $R_n$, so gilt bekanntlich der

**Satz:** *Notwendig und hinreichend für die lineare Abhängigkeit der $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \cdots, \mathfrak{x}_m$ ist das Verschwinden der* GRAMschen *Determinante.*[1]

(1) Vgl. COURANT und HILBERT: Methoden der mathematischen Physik, 1, Zweite Auflage (1936), S. 29.

$$\begin{vmatrix} 1 & (\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2) & \cdots & (\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_m) \\ (\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_1) & 1 & \cdots & (\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_m) \\ \cdots\cdots & & & \\ (\mathfrak{x}_m\mathfrak{x}_1) & (\mathfrak{x}_m\mathfrak{x}_2) & \cdots & 1 \end{vmatrix} .$$

(**C**) Es seien

$$_{(i)}\mathfrak{x}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, (2k+1)$$

$k$ Kugeln in $R_n$.

Wenn $_{(i)}\mathfrak{x}$ und $_{(j)}\mathfrak{x}$ zueinander senkrecht sind, so folgt

$$(1) \qquad ({}_{(i)}\mathfrak{x}\, {}_{(j)}\mathfrak{x}) = \delta_{ij}\,,$$

wobei $\delta_{ij} = 1$ oder 0 ist, je nachdem $i = j$ oder $j \neq j$ ist.

Nun führen wir die folgenden Formen ein:

$$(2) \qquad ({}_{(i)}\dot{\mathfrak{x}}\, {}_{(j)}\mathfrak{x}) = -({}_{(j)}\dot{\mathfrak{x}}\, {}_{(i)}) .$$

Betrachten wir

$$(3) \qquad J \equiv ({}_{(1)}\dot{\mathfrak{x}}\, {}_{(2)}\mathfrak{x})({}_{(1)}\dot{\mathfrak{x}}\, {}_{(3)}\mathfrak{x})({}_{(1)}\dot{\mathfrak{x}}\, {}_{(4)}\mathfrak{x}) \cdots ({}_{(1)}\dot{\mathfrak{x}}\, {}_{(2k+1)}\mathfrak{x})\,,$$

so folgt aus (2)

$$(4) \qquad J = ({}_{(2)}\dot{\mathfrak{x}}\, {}_{(1)}\mathfrak{x})({}_{(3)}\dot{\mathfrak{x}}\, {}_{(1)}\mathfrak{x})({}_{(4)}\dot{\mathfrak{x}}\, {}_{(1)}\mathfrak{x}) \cdots ({}_{(2k+1)}\dot{\mathfrak{x}}\, {}_{(1)}\mathfrak{x})\,,$$

so *kann man sagen, dasz*

$$\cos\phi_2 \cdot \cos\phi_3 \ldots \cos\phi_{2k+1} = \cos\psi_1 \cdot \cos\psi_2 \ldots \cos\psi_{2k+1}$$

*gilt,* wo $\phi_i$ der Winkel zwischen $_{(1)}\dot{\mathfrak{x}}$ und $_{(i)}\mathfrak{x}$, $\psi_i$ der Winkel zwischen $_{(i)}\dot{\mathfrak{x}}$ und $_{(1)}\mathfrak{x}$ ist.

(**D**) Wir betrachten die Kreistransformation

$$(1) \qquad \bar{\xi}^\alpha = A^\alpha_\beta\, \xi^\beta\,,$$

wo $\xi$, $\bar{\xi}$ die Kugeln in $R_n$ sind und die Funktionaldeterminante $|A^\alpha_\beta|$ nicht verschwindet.

Definieren wir die lineare Transformation

$$(2) \qquad \delta\xi^\alpha = d\xi^\alpha + \Gamma^\alpha_\beta\, \xi^\beta\,,$$

so transformieren sich die Parameter $\Gamma^{\alpha}_{\beta}$ der Übertragung in folgender Weise

$$(3)\qquad \overline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta} = A^{\alpha}_{M}\,(Q^{N}_{\beta}\,\Gamma^{M}_{N} + dQ^{M}_{\beta}),$$

wo

$$(4)\qquad A^{\alpha}_{N}Q^{N}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}$$

gilt.

## ( 2 )

(**A**) Die folgenden Zeilen bilden eine Fortsetzung der in dieser Zeitschrift erschienenen Arbeit(1) „*Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln* (V)“, § I, deren Kenntnis daher vorausgesetzt wird.

Aus

$$(1)\qquad \cos^2\varphi = T^{\alpha\beta}\rho_{\alpha}\rho_{\beta}$$

erhalten wir

$$(2)\qquad \cos^2\varphi = \begin{vmatrix} T^{11} & -2T^{12} & T^{22} \\ \rho_2 & \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 & \rho_1 \end{vmatrix}.$$

Nun betrachten wir

$$(3)\qquad \cos^2\varphi = T^{\alpha\beta}\rho_{\alpha}\rho_{\beta} = 0$$

und

$$(4)\qquad \cos^2\psi = T^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha}\sigma_{\beta} = 0,$$

d. h.

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} T^{11} & -2T^{12} & T^{22} \\ \rho_2 & \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 & \rho_1 \end{vmatrix} = 0.$$

(1) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geo. der Kreise und Kugeln V, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. V, S, 306.

und

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} T^{11} & -2T^{12} & T^{22} \\ \sigma_2 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix} = 0,$$

so folgt aus (5) und (6)

$$(7)\qquad \begin{cases} T^{22} = \mu\, \rho_1 \sigma_1 , \\ -2T^{12} = \mu\, \{\rho_1\sigma_2 + \rho_2\sigma_1\} , \\ T^{11} = \mu\sigma_2\rho_2 . \end{cases}$$

wobei der Proportionalitätsfaktor $\mu$ durch

$$(8)\qquad 1/\mu^2 = \{\rho_1\sigma_2 - \rho_2\sigma_1\}^2 : \{(T^{12})^2 - T^{11}T^{22}\}$$

geliefert wird.

*Wenn*

$$\rho_1 = \sigma_1 , \quad \rho_2 = \sigma_2$$

*oder*

$$\rho_2 = \sigma_1 , \quad \rho_1 = \sigma_2$$

*gelten, so gilt* (7) *im allgemeinen nicht.*

(**B**) Wir betrachten

$$(1)\qquad \cos^2 \varphi = T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta .$$

Bildet man dieses Quadrat für $p$ Richtungen, so kommt zustande bei der Summierung:

$$(2)\qquad \sum_u^{1,\ldots,p} \cos^2 \overset{u}{\varphi} = \sum_u^{1,\ldots,p} T^{\alpha\beta} \overset{u}{\rho}_\alpha \overset{u}{\rho}_\beta .$$

Wir setzen

$$(3)\qquad \cos^2 \overset{u}{\varphi} = T^{\alpha\beta}_{\lambda\mu} T^{\lambda\mu} \overset{u}{\rho}_\alpha \overset{u}{\rho}_\beta ,$$

$$(4)\qquad h_{\lambda\mu} = T^{\alpha\beta}_{\lambda\mu} T_{\alpha\beta} .$$

Liegt $v^\nu$ in einer Hauptrichtung von $h_{\lambda\mu}$, so ist

$$(5)\qquad h^{\nu}_{\cdot\mu}\, v^\mu = \lambda v^\nu$$

oder

$$(6) \qquad T^{\nu}_{\alpha} T^{\alpha}_{\mu} v^{\mu} = \lambda v^{\nu};$$

woraus folgt

$$(7) \qquad T^{\nu}_{\beta} T^{\beta}_{\alpha} T^{\alpha}_{\beta} v^{\mu} = \lambda T^{\nu}_{\beta} v^{\beta},$$

oder

$$(8) \qquad h^{\nu}_{\alpha} (T^{\alpha}_{\mu} v^{\mu}) = \lambda T^{\nu}_{\beta} v^{\beta}.$$

(**C**) Wir setzen

$$T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta = \xi^\alpha \rho_\beta .$$

Wenn

$$T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta = \text{const.},$$

so kann man setzen

$$d(\xi^\alpha \rho_\beta) = \xi^\alpha d\rho_\beta + \rho_\beta d\xi^\alpha$$
$$= \xi^\alpha (d\rho_\beta - \Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma} \rho_\beta \, dx^\gamma) = 0,$$

d. h.

$$d\rho_\beta = \Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma} \rho_\beta dx^\gamma,$$

wo die $\Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma}$ die beliebig wählbaren Parameter sind und $x^\gamma$ die Variablen bedeuten.

Es seien $g_{ij}$ die Fundamentaltensoren, so folgt

$$T^{\alpha\beta} = T^{\alpha}_{k} g^{k\beta},$$

daraus ergibt sich

$$\cos^2 \varphi = T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta = T^{\alpha}_{k} g^{k\beta} \rho_\alpha \rho_\beta .$$

(**D**) Wir setzen $\cos^2 \varphi = T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta$ in

$$(1) \qquad (\rho\rho) = T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta, \qquad (2) \qquad (\rho\rho) = \rho^\alpha \rho^A$$

wo

$$(3) \qquad T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}.$$

und

$$(4) \qquad T^{\alpha\beta} = T^{\lambda M} A^{\alpha}_{\lambda} A^{\beta}_{M}$$

ist.

So folgt

$$(5) \qquad (\rho\rho) = T^{\lambda M} A^{\alpha}_{\lambda} A^{\beta}_{M} \rho_\alpha \rho_\beta .$$

Man kann $\cos^2 \varphi = T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta$

$$(6) \qquad \cos^2 \varphi = \rho^\lambda v_\lambda$$

oder

$$(7) \qquad (\rho\rho) = \rho^\lambda v_\lambda$$

setzen.

(**E**) Wir betrachten

$$(1) \qquad \cos^2 \varphi = T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta , \quad A^{\alpha\rho} \rho_\alpha \rho_\beta = 1 .$$

Wenn $\cos^2 \varphi = K$, so

$$(2) \qquad (T^{\alpha\beta} - A^{\alpha\beta} K) \rho_\alpha \rho_\beta - 0 ,$$

wo K eine Konstante ist.

Dasselbe gilt von $\cos^2 \bar{\varphi} = \bar{K}$, so folgt daraus

$$(3) \qquad (\bar{T}^{\alpha\beta} - A^{\alpha\beta} \bar{K}) \rho_\alpha \rho_\beta = 0 ,$$

wo $\bar{K}$ eine andere Konstante ist.

Aus (2), (3) wird das Tripelverhäitnis $\rho$ Gerade *in folgender Weise dargestellt:*

$$(4) \qquad \frac{(\bar{T}^{\alpha\beta} - A^{\alpha\beta}\bar{K}) \rho^r \rho^s}{(\bar{T}^{\alpha\beta} - A^{\alpha\alpha}\bar{K}) \rho^r \rho^s} \frac{\{\bar{T}^{11} - A^{11}\bar{K}\}\{\bar{T}^{22} - A^{22}\bar{K}\} - \{\bar{T}^{12} - A^{12}\bar{K}\}^2}{\{T^{11} - A^{11}K\}\{T^{22} - A^{22}K\} - \{T^{12} - A^{12}K\}^2} .$$

(**F**) Wenn

$$(1) \qquad (T^{12})^2 = T^{11} T^{22}$$

in

$$(2) \qquad \cos^2 \varphi = T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta ,$$

gilt, so folgt

$$(3) \qquad \cos^2\varphi = T^{11}\rho_1^2 + 2T^{12}\rho_1\rho_2 + T^{22}\rho_2^2$$
$$= \{\sqrt{T^{11}}\,\rho_1 + \sqrt{T^{22}}\,\rho_2\}^2,$$

d. h.

$$(4) \qquad \cos\varphi = \pm\ \{\sqrt{T^{11}}\,\rho_1 + \sqrt{T^{22}}\,\rho_2\} : A^{\alpha\beta}\,\rho_\alpha\rho_\beta\,.$$

In diesem Falle wird der Winkel $\varphi$ zwischen dem Kreis und der Kugel mit (4) gegeben. Die Deutung von $T^{\alpha\beta}$, $A^{\alpha\beta}$, $\rho_i$ haben wir schon erklärt.

In unserem Falle gilt

$$(5) \qquad \cos\varphi = \pm\{\sqrt{T^{11}}\,\rho_1 + \sqrt{T^{22}}\,\rho_2\} : \sqrt{\{A^{11}\rho_1^2 + 2A^{12}\rho_1\rho_2 + A^{22}\rho_2^2\}}\,.$$

Wenn

$$(6) \qquad (A^{12})^2 = A^{11}A^{22},$$

so

$$(7) \qquad \cos\varphi = \pm\ \{\sqrt{T^{11}}\,\rho_1 + \sqrt{T^{22}}\,\rho_2\} : \{\sqrt{A^{11}}\,\rho_1 + \sqrt{A^{11}}\,\rho_2\}\,.$$

## ( 3 )

(**A**) Die folgenden Zeilen bilden eine Fortsetzung der in dieser Zeitschrift erschienenen Arbeit[1] *„Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln* (V), (IX), (X), (XI)", deren Kenntnis daher vorausgesetzt wird.

Geben wir einen Kreis $\xi$ in $R_2$ als Funktion eines Parameters $i$, so folgt[2]

$$(1) \qquad \begin{cases} \xi_{\sigma\sigma} = -\ \xi + \bar{c}\,\mathfrak{v} + c\,\bar{\mathfrak{v}}\,, \\ \mathfrak{v}_\sigma = -\ c\xi_\sigma\,, \\ \bar{\mathfrak{v}}_\sigma = -\ \bar{c}\,\xi_\sigma\,, \end{cases}$$

(1) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (V), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., (15), S. 333.
MATUMURA, S.: Beiträge zur Geo. der Kreise und Kugeln (IX), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., (12), S. 148.
MATUMURA, S.: Beiträge zur Geo. der Kreise und Kugeln (X), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., (1), S. 71.
MATUMURA, S.: Beträge zur Geo. der Kreise und Kugeln (XI), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., (13), S. 95.

(2) THOMSEN, G.: Über konforme Geo. II., Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ., Bd. 4, S. 125.

wo $\mathfrak{v}$, $\bar{\mathfrak{v}}$ die beiden Schnittpunkte von $\xi$ mit dem Nachbarkreis sind.

Wenn $\bar{\mathfrak{v}}$ eine Parallelkurve von $\mathfrak{v}$, so folgt

$$(2) \qquad \bar{\mathfrak{v}} = \mathfrak{v} + k,$$

wo $k$ eine Konstante ist.

Aus (1), (2) folgt

$$(3) \qquad \begin{cases} \xi_{\sigma\sigma} = -\xi + 2c\mathfrak{v} + ck, \\ \mathfrak{v}_\sigma = -c\xi_\sigma, \end{cases}$$

wo

$$c = \bar{c}.$$

Aus (3) kann man $\xi$ oder $\mathfrak{v}$ finden.

(**B**) Wenn

$$\xi_{\sigma\sigma} = \bar{c}\xi_\sigma + c\,\xi_\sigma$$

gilt, so folgt aus THOMSENS Arbeit[1]

$$\mathfrak{v}_\sigma + \bar{\mathfrak{y}}_\sigma - \xi + \bar{c}\,\mathfrak{v} + c\,\bar{\mathfrak{v}} = 0,$$

so entsteht

$$\{\mathfrak{v}_\sigma + \bar{c}\,\mathfrak{v}\} + \{\bar{\mathfrak{v}}_\sigma + c\,\bar{\mathfrak{v}}\} - \xi = 0.$$

(**C**) Ist $k$ ein fester Kreis und $\mathfrak{v}$ ein nicht auf ihm gelegner Punkt, so ist

$$(1) \qquad \bar{\mathfrak{v}} = 2(\mathfrak{v}k)k - \mathfrak{v}$$

der zu $\mathfrak{v}$ in bezug auf $k$ inverse Punkt.

Gilt (1), so folgt aus THOMSENS Arbeit

$$(2) \qquad \begin{cases} \xi_{\sigma\sigma} = -\xi + \bar{c}\,\mathfrak{v} + 2c(\mathfrak{v}k)k - \mathfrak{v}c, \\ \mathfrak{v}_\sigma = -c\xi_\sigma, \\ 2(\mathfrak{v}k)k - \mathfrak{v} = -\bar{c}\,\xi_\sigma, \end{cases}$$

daraus ist zu bekommen:

(1) THOMSEN, a. a. O., S. 130.

$$(3)\qquad \begin{cases} \xi_{\sigma\sigma} = -\xi + \bar{c}\mathfrak{v} - c\bar{c}\xi_\sigma, \\ \mathfrak{v}_\sigma = -c\xi_\sigma \end{cases}$$

d. h.

$$(4)\qquad \xi_{\sigma\sigma} = -\xi + c\bar{\mathfrak{v}} + \bar{c}\mathfrak{v}_\sigma .$$

(**D**) Wenn

$$(1)\qquad \xi_{\sigma\sigma} + \xi = 0, \qquad \text{d. h.}\quad \xi = c_1 \cos\sigma + c_2 \sin\sigma ,$$

so

$$(2)\qquad \begin{cases} 0 = \bar{c}\mathfrak{v} + c\bar{\mathfrak{v}}, \\ \mathfrak{v}_\sigma = -c\xi_\sigma, \\ \bar{\mathfrak{v}}_\sigma = -\bar{c}\xi_\sigma \end{cases}$$

$$\therefore\quad \mathfrak{v}/c = \bar{\mathfrak{v}}/\bar{c} = \mathfrak{v}/-c \qquad \therefore\quad (3)\quad \mathfrak{v}/c = 0,$$

wo $c_i$ die Konstanten sind.

(**E**) Nun setzen wir

$$(1)\qquad \xi = \alpha\mathfrak{x} + \beta\mathfrak{y},$$

wo $\alpha$, $\beta$ die skalaren Gröszen sind, so folgt

$$(2)\qquad \begin{cases} \alpha\mathfrak{x}_{\sigma\sigma} + \beta\mathfrak{y}_{\sigma\sigma} = -\alpha\beta - \beta\mathfrak{y} + \bar{c}\mathfrak{v} + c\bar{\mathfrak{v}}, \\ \mathfrak{v}_\sigma = -c\alpha\mathfrak{x}_\sigma - c\beta\mathfrak{y}_\sigma \\ \bar{\mathfrak{v}}_\sigma = -\bar{c}\alpha\mathfrak{x}_\sigma - \bar{c}\beta\mathfrak{y}_\sigma \end{cases}$$

d. h.

$$(3)\qquad \begin{cases} 0 = 1/c\,\{(\mathfrak{x}_{\sigma\sigma} + \mathfrak{y}_{\sigma\sigma}) + (\mathfrak{x} + \mathfrak{y})\} + \bar{c}\mathfrak{v} + c\bar{\mathfrak{v}}, \\ \mathfrak{v}_\sigma = \mathfrak{x}_\sigma + \mathfrak{y}_\sigma, \\ \bar{\mathfrak{v}}_\sigma = \{\bar{c}/c\}\,\{\mathfrak{x}_\sigma + \mathfrak{y}_\sigma\}. \end{cases}$$

oder

$$(4)\qquad \begin{cases} 0 = 1/c\,\{\mathfrak{v}_{\sigma\sigma} + \mathfrak{v}\} + \bar{c}\mathfrak{v} + c\bar{\mathfrak{v}}, \\ \bar{\mathfrak{v}}_\sigma = \{\bar{c}/c\}\,\mathfrak{v}_\sigma, \end{cases}$$

so erhalten wir

$$(5) \qquad 0 = \mathfrak{v}_{\sigma\sigma} + \{1 + c\bar{c} + c\bar{c} \textstyle\int \bar{c}/c \cdot d\sigma\}\, \mathfrak{v}\,.$$

Aus (5) kann man $\mathfrak{v}$ finden, wo

$$\mathfrak{v}_{\sigma\sigma} = d^2\mathfrak{v} / d\sigma^2\,.$$

(**F**) Sind $\mathfrak{x}\,(\bar{\mathfrak{x}})$ und $\mathfrak{y}\,(\bar{\mathfrak{y}})$ zwei senkrechte Kreise in $R_2$, so bezeichnen

$$(1) \qquad \mathfrak{v} = \mathfrak{x} + i\mathfrak{y}$$

und

$$(2) \qquad \bar{\mathfrak{v}} = \bar{\mathfrak{x}} + i\,\bar{\mathfrak{y}}$$

zwei Punkte in $R_2$, wo

$$(3) \qquad (\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = 0\,, \quad (\bar{\mathfrak{x}}\,\bar{\mathfrak{y}}) = 0$$

sind.

So folgt aus (1), (2) und (1) in (**A**):

$$(4) \qquad \begin{cases} \xi_{\sigma\sigma} = -\,\xi + \bar{c}\,\{\mathfrak{x} + i\mathfrak{y}\} + c\,\{\bar{\mathfrak{x}} + i\,\bar{\mathfrak{y}}\}\,, \\ \mathfrak{x}_\sigma + i\mathfrak{y}_\sigma = -\,c\xi_\sigma\,, \\ \bar{\mathfrak{x}}_\sigma + i\bar{\mathfrak{y}}_\sigma = -\,\bar{c}\,\xi_\sigma\,, \end{cases}$$

wo $i = \sqrt{-1}$ ist.

(4) ist eine Umform von THOMSENs Formeln.[1]

## ( 4 )

Die folgede Arbeit ist die Untersuchung der LAGUERRE-Geometrie.

Es sei durch den Vierervektor $\mathfrak{x}\,(u^1, u^2)$ eine zweiparametrige Schar gerichteter Kugeln mit den Mittelpunkten $x_i\,(u^1, u^2)$, $i = 1, 2, 3$ und dem Halbmesser $x_4\,(u^1, u^2)$ gegeben.

In einem $R_4$ entspricht diesem Kugelsystem durch isotrope Projektion eine Fläche, als deren Maszbestimmung $\delta\mathfrak{x}^2$ wir das als positiv vorausgesetzte Quadrat der Tangentenentfernung von zwei benachbarten Kugeln wählen:

(1) THOMSEN, a. a. O., S. 27.

( 1 ) $\delta\mathfrak{x}^2 = \delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \delta x_3^2 - \delta x_4^2 = A_{ik}\delta u^i\delta u^k = 1\,, \quad A_{ik} = \mathfrak{x}_i\mathfrak{x}_k\,.$

Mithin ist

$$A = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} > 0\,.$$

Aus der Annahme (1) folgt durch die Ableitung

( 2 ) $\delta\mathfrak{x}\delta^2\mathfrak{x} = A_{ik}\delta u^i\delta^2 u^k = 0\,,$

da nach dem „*Lemma Ricci*" $A_{ikl} = 0$ ist.

Nun gilt

( 3 ) $(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = 1$

d. h.

$$(\mathfrak{x}\delta\mathfrak{x}) = 0$$

so folgt

$$(\delta\mathfrak{x}\delta\mathfrak{x}) + (\mathfrak{x}\delta^2\mathfrak{x}) = 0\,,$$

so kommt zustande

$$3\,\delta\mathfrak{x}\cdot\delta^2\mathfrak{x} + \mathfrak{x}\delta^3\mathfrak{x} = 0,$$

d. h.

$$3\,A_{ik}\delta u^i\delta^2 u^k + (\mathfrak{x}\delta^3\mathfrak{x}) = 0\,,$$

daraus folgt

( 4 ) $(\mathfrak{x}\delta^3\mathfrak{x}) = -\,3\,A_{ik}\delta u^i\delta^2 u^k\,.$

Wenn

( 5 ) $\delta\mathfrak{y}^2 = \delta\mathfrak{y}_1^2 + \delta\mathfrak{y}_2^2 + \delta\mathfrak{y}_3^2 - \delta\mathfrak{y}_4^2 = B_{ik}\delta u^i\delta u^k = 1\,, \quad B_{ik} = \mathfrak{y}_i\mathfrak{y}_k\,,$

so folgt

( 6 ) $(\mathfrak{y}\delta^3\mathfrak{y}) = -\,3\,B_{ik}\delta u^i\delta^2 u^k\,.$

Nun nehmen wir

( 7 ) $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = 0$

an, so entsteht aus (7)

( 8 ) $(\mathfrak{y}\delta\mathfrak{x}) + (\mathfrak{x}\delta\mathfrak{y}) = 0\,,$

d. h.

( 9 ) $2\,(\delta\mathfrak{y}\cdot\delta\mathfrak{x}) + (\mathfrak{y}\delta^2\mathfrak{x}) + (\mathfrak{x}\delta^2\mathfrak{y}) = 0\,.$

Setzen wir

$$(10)\qquad (\mathfrak{y}\partial^2\mathfrak{x}) + (\mathfrak{x}\partial^2\mathfrak{y}) = - G_{ik}\partial u^i \partial u^k ,$$

so folgt

$$(11)\qquad (\partial\mathfrak{x}\partial\mathfrak{y}) = G_{ik}\partial u^i \partial u^k ,$$

Aus (1), (5) und (11) ergibt sich

$$(12)\qquad \cos^2\theta = (G_{ik}\partial u^i \partial u^k)^2 : (A_{ik}\partial u^i \partial u^k)(B_{ik}\partial^i u : \partial u^k) ,$$

wo $\theta$ den Winkel zwischen zwei Fortschreitungsrichtungen von $\partial\mathfrak{x}$ und $\partial\mathfrak{y}$ bedeutet.

Ferner folgt aus (8)

$$(13)\qquad (\partial^2\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}) + 2(\partial\mathfrak{x}\partial\mathfrak{y}) + \mathfrak{x}\partial^2\mathfrak{y}) = 0 ,$$

$$(14)\qquad (\partial^3\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}) + (\partial^2\mathfrak{x}\cdot\partial\mathfrak{y}) + 2(\partial^2\mathfrak{x}\cdot\partial\mathfrak{y}) + 2(\partial\mathfrak{x}\cdot\partial^2\mathfrak{y}) + (\partial\mathfrak{x}\cdot\partial^2\mathfrak{y}) + (\mathfrak{x}\partial^3\mathfrak{y}) = 0 , \quad \text{u. s. w..}$$

Aus (11) ergibt sich

$$(15)\qquad (\partial^2\mathfrak{x}\cdot\partial\mathfrak{y}) + (\partial^2\mathfrak{y}\cdot\partial\mathfrak{x}) = G_{ik}\partial u^i \partial^2 u^k .$$

In dieser Arbeit kann man untersuchen wie in meiner Arbeit.(1) Der Flächeninhalt von $\mathfrak{x}(u^1, u^2)$ in (1) gibt

$$(16)\qquad \Omega = \iint \sqrt{A}\, du^1 du^2 .$$

Für beliebige Kugelsysteme ist

$$(17)\qquad A^{ik}\mathfrak{x}_{ik} = 0$$

die notwendige und hinreichende Bedingung(2) für das Verschwinden der ersten Variation $\partial\Omega$.

Vorausgesetzt, dasz besteht

$$(18)\qquad A^{jk}\mathfrak{x}_{jk} + 2p^i\mathfrak{x}_i + q\,\mathfrak{x} = 0 ,$$

so folgt aus (17)

(1) NAKAZIMA (MATUMURA), S.: Differentialgeometrie der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku, Math. Jaurn. 34 (1931), p. 192.

(2) KÖNIG, K.: L-Minimalflächen, Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg, Bd, VI (1921-1930), S. 191.

(19) $\quad 2p^i \mathfrak{x}_i + q\mathfrak{x} = 0$,

wo $p^i$, $q$ die skalaren Gröszen sind.

## ( 5 )

Die folgenden Zeilen bilden eine Fortsetzung der in dieser Zeitschrift erschienenen Arbeit[1] „Kugelgeometrie von MÖBIUS“, deren Kenntnis daher vorausgesetzt wird.

(**A**) *Wir werden die folgende Aufgabe in unserer Kreisgeometrie behandeln, für die eine Schar von Kreisschnitten eines elliptischen Zylinders die Orthogonaltrajektorien und die Strionslinie sz bestimmt.*

In disem Falle kann man

(1) $\quad (\theta_t\theta_t) = 1 + m^2, \quad (\theta_t\theta_\tau) = -\sin\tau, \quad (\theta_\tau\theta_\tau) = 1$

setzen.

Die Kreisschnitte sind die Kurven

(2) $\quad t = \text{const}$;

also ist

(3) $\quad \varphi(t, \tau) = t$.

Ist

(4) $\quad \psi(t, \tau) = a$

die Gleichung der gesuchten Orthogonalschar, so hat man zur Bestimmung von $\psi$ die partielle Differentialgleichung

(5) $$\sin\tau \frac{\partial\psi}{\partial\tau} + \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0.$$

Sie ist ohne weiters integrabel und ergibt

(6) $$\psi = e^t \operatorname{ctg}\frac{\tau}{2} = a.$$

(1) NAKAZIMA, S.: Kugelgeometrie von MÖBIUS, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. 2 (1929) p. 36.

Die Gleichung der Striktionslinie reduziert sich auf[1]

$$(7) \qquad \sin\tau \cdot \cos\tau = 0 .$$

(B) Wir setzen

$$(1) \qquad (\theta_t\theta_t)\, dt^2 + 2(\theta_t\theta_\tau)\, dt d\tau + (\theta_\tau\theta_\tau)\, d\tau^2$$

in die Form

$$(2) \qquad \varphi_2 \equiv g_{rs} du^r du^s .$$

Ist (2) für jede beliebige Transformation von Parametern

$$(3) \qquad \bar{u}^1 = \bar{u}^1(u^1 u^2), \quad \bar{u}^2 = \bar{u}^2(u^1, u^2)$$

invariant, d, h.

$$(4) \qquad \bar{g}_{rs} d\bar{u}^r d\bar{u}^s = g_{rs} du^r du^s ,$$

so folgt daraus

$$(5) \qquad \bar{g}_{rs} = g_{pq} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}^r} \frac{\partial u^q}{\partial u^s} .$$

Die kovariante partielle Ableitung eines kovarianten Vektors $v_r$ wird durch

$$(6) \qquad v_{rs} = \frac{dv_r}{du^s} \Gamma^t_{rs} v_t$$

definiert, wobei

$$(7) \qquad \Gamma^t_{rs} = g^{tp} \left( \frac{\partial g_{rt}}{\partial u^s} + \frac{\partial g_{ps}}{\partial u^r} - \frac{\partial g_{rs}}{\partial u^p} \right)$$

und $g^{tp}$ die kontravarianten Bestimmungszahlen des Tensors $g_{rs}$ sind. d. h.

$$(8) \qquad \begin{cases} g^{11} = g_{22} / G, & g^{12} = -g_{12} / G, \\ g^{22} = g_{11} / G, & G = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 . \end{cases}$$

Setzen wir ferner

$$(9) \qquad \varphi_3 \equiv a_{rst}\, du^r du^s du^t ,$$

(1) KOMMERELL: Theorie der Raumkurven und krummen Flächen. II (1931), S. 39.

die für eine unimoduläre projektive Transformation unverändert bleibt, so gibt uns $\varphi_3 = 0$ die DARBOUXschen Richtungen der Kreisfläche K.

Die beiden Formen $\varphi_2$, $\varphi_3$ sind zueinander apolar, d. h.

$$(10) \qquad g^{rs} a_{rst} = 0.$$

Wenn

$$(11) \qquad g_{rs}\, du^r du^s = A^{ij} (l_{i,r}\, du^r)(l_{j,s}\, du^s) = 0$$

gilt, so sind (11) die Minimallinien auf der Kreisfläche, wo

$$(12) \qquad l_{i,r}\, du^r = \text{const.}, \quad l_{j,r}\, du^s = \text{const.}$$

die neuen Parameterlinien sind.

Nun setzen wir

$$(13) \qquad \begin{cases} g_{\lambda\alpha} g^{\mu\nu} = A_\lambda^\nu, \\ \Delta_\mu g^{\lambda\nu} = Q_\mu^{\cdot\lambda\nu}, \end{cases}$$

so folgt

$$(14) \qquad \begin{cases} (\Delta_\mu g_{\lambda\alpha}) g^{\alpha\nu} + g_{\lambda\alpha} Q_\mu^{\cdot\alpha\nu} + C_{\mu\alpha}^{\cdot\cdot\beta} g_{\lambda\beta} g^{\alpha\nu} = C_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu}, \\ Q'_{\mu\lambda\nu} = - g_{\lambda\alpha} g_{\nu\beta} Q_\mu^{\cdot\alpha\beta} + 2 C_{\mu(\lambda}^{\cdot\cdot\alpha} g_{)\nu\alpha}, \end{cases}$$

wo wir setzen

$$(15) \qquad Q'_{\mu\lambda\nu} = \Delta, \Delta_\mu g_{\lambda\nu},$$

die für eine inzidenzinvariante bzw. überschiebungsinvariante Uber-tragung in

$$(16) \qquad \begin{cases} Q'_{\mu\lambda\nu} = - g_{\lambda\alpha} g_{\nu\beta} Q_\mu^{\cdot\alpha\beta} + 2 C_\mu g_{\lambda\nu}, \\ Q'_{\mu\lambda\nu} = - g_{\lambda\alpha} g_{\nu\beta} Q_\mu^{\cdot\alpha\beta} \end{cases}$$

übergeht.

Wir führen

$$(17) \qquad \bar{\varphi}_2 \equiv b_{rs} du^r du^s, \quad b_{rs} = b_{sr}$$

ein, wo

$$(18) \qquad \lambda L = b_{11}, \ \lambda M = b_{12}, \ \lambda N = b_{22},$$

L, M, N die Fundamentalgröszen zweiter Ordnung sind. $\lambda$ steht in meiner Arbeit.[1]

Dann wird die Hauptkrümmung K mit

$$(19)\qquad K = \frac{\bar{\varphi}_2}{\varphi_2} = \frac{b_{rs}du^r du^s}{g_{rs}du^r du^s}$$

gegeben.

Der extreme Wert K der Hauptkrümmung bei ber Änderung des Wertes $du^1 : du^2$ muss den beiden Beziehungen genügen:

$$(20)\qquad (Kg_{rs} - b_{rs})\, du^r du^s = 0\,, \quad r, s = 1, 2\,.$$

Daraus folgt für K für den extremen Wert K die Gleichung

$$(21)\qquad |\, Kg_{rs} - b_{rs}\,| = 0\,.$$

Somit ergeben sich für die zwei extremen Werte[2] $K_1$ und $K_2$

$$(22)\qquad K_1 K_2 = H, \qquad K_1 + K_2 = M\,.$$

(C) Um die Punkte des kürzesten Abstands auf zwei konsekutiven Kurven $\varphi(t, \tau) = a$ und $\varphi(t, \tau) = a + da$ auf der Kreisfläche zu ermitteln, verfahren wir folgendermaszen: Es sei $P(t, \tau)$ ein Punkt auf der Kurve $\varphi = a$; $P_1(t + \delta t, \tau + \delta\tau)$ ein solcher auf der Kurve $\varphi = a + da$, und es stehe das Linienelement $PP_1 = dn$ in P auf $\varphi = a$ senkrecht.

Die Bedingung hierfür ist

$$(1)\qquad (\theta_t\theta_t)\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\,\delta t + (\theta_t\theta_\tau)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\,\partial\tau - \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\delta t\right) - (\theta_\tau\theta_\tau)\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\partial\tau = 0\,.$$

Da P auf der Kurve $\varphi = a$, $P_1$ auf der Kurve $a + da$ liegt, so ist

$$(2)\qquad \varphi(t, \tau) = a\,,$$

$$(3)\qquad \varphi(t + \delta t, \tau + \delta\tau) = \varphi(t, \tau) + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\delta t + \frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\,\delta\tau = a + da\,.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$(4)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\delta t + \frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\,\delta\tau = da\,.$$

(1) NAKAZIMA, a. a. O., S., 36.
(2) SCHEFFERS, G.: Theorie der Flächen, S. 135.

Endlich ist[1]

$$(5)\qquad PP_1 = dn = \{1/\sqrt{\lambda}\}\sqrt{\{(\theta_t\theta_t)\,\partial t^2 + 2(\theta_t\theta_\tau)\partial t\partial\tau + (\theta_\tau\theta_\tau)\,\partial\tau^2\}},$$

Berechnen wir aus (1) und (4) die Werte von $\partial t$ und $\partial\tau$ und setzen sie in (5) ein, so folgt

$$dn = \frac{da}{\sqrt{\lambda}\,\sqrt{\Delta'\varphi}},$$

wo

$$\Delta'\varphi = \frac{(\theta_t\theta_t)(\partial\varphi/\partial\tau)^2 - 2(\theta_t\theta_\tau)\,\partial\varphi/\partial t\cdot\partial\varphi/\partial\tau + (\theta_\tau\theta_\tau)(\partial\varphi/\partial t)^2}{(\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau) - (\theta_t\theta_\tau)^2}.$$

$$\lambda = \frac{K}{\{(\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau) - (\theta_t\theta_\tau)^2\}\,\{LN - M^2\}},$$

$\lambda$, $(\theta_i\theta_k)$ stehen in meiner Arbeit,[2] K, L, M, N stehen in SCHEFFERS' Buch.[3]

## ( 6 )

(**A**) Wir können zwei neue Kugeln

$$(1)\qquad \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha} = c^{\alpha}_{\beta}\,\mathfrak{x}^{\beta}, \qquad [\alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}]$$

als Linearkombinationen der $\mathfrak{x}^\alpha$ mit Koeffizienten $c^\alpha_\beta$, deren Determinante $|c^\alpha_\beta| \neq 0$ sein muss, einführen, und wenn $\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\mathrm{I}}$ und $\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\mathrm{II}}$ nicht proportional werden sollen, so können wir dann durch die $\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha}$ den Kreis darstellen, wo $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}^*$ die Kugeln in $R_n$ sind.

Nun lässt sich $\mathfrak{x}^\alpha$ folgendermassen transformieren:

$$(2)\qquad \overset{**}{\mathfrak{x}}{}^{\beta} = \overset{*}{c}{}^{\beta}_{\gamma}\,\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\gamma}$$

und

$$(3)\qquad \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha} = \mathfrak{c}^{\alpha}_{\beta}\,\mathfrak{x}^{\beta},$$

(1) Vgl. KOMMERELL: Theorie der Raumkurven und Flächen, II (1931), S. 36.
(2) NAKAZIMA, S.: Kugelgeo. von MÖBIUS, Mem. of the Fac. of the Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. 2, p. 36.
(3) SCHEFFERS, G.: Theorie der Flächen (1922), S. 135.

wobei $\overset{*}{c}{}^{\beta}_{\tau}$ dieselben Bedingungen wie $c^{\alpha}_{\beta}$ erfüllen.

Deshalb erhalten wir sofort aus (2), (3)

$$(4) \qquad \overset{**}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha} = \bar{c}^{\alpha}_{\tau}\, \mathfrak{x}^{\tau},$$

wo

$$(5) \qquad \bar{c}^{\alpha}_{\tau} = \overset{*}{c}{}^{\beta}_{\tau}\, c^{\alpha}_{\beta}.$$

Wir denken an

$$(6) \qquad d\mathfrak{y}^{i} = c^{i}_{j}\, d\mathfrak{y}^{j}, \qquad [i, j = \mathrm{I}, \mathrm{II}]$$

wo $\mathfrak{y}$, $\bar{\mathfrak{y}}$ die Kreise in $R_n$ sind und $\bar{\mathfrak{y}}^{i}$, $\mathfrak{y}^{j}$ die Kreise in $R_n$ bedeuten.

Wir denken uns weiter für $\mathfrak{x}^{\lambda}$ die folgenden Differentiale:

$$(7) \qquad \delta\mathfrak{x}^{\lambda} = d\mathfrak{x}^{\lambda} + \mathfrak{K}^{\lambda}_{i}\, d\mathfrak{y}^{i},$$

wo $\mathfrak{K}^{\lambda}_{i}$ die Funktionen von $\mathfrak{x}^{\lambda}$ und $\mathfrak{y}^{i}$ sind.

Deshalb stellt (7) dann und nur dann die Parallelverschiebung des Kreises $\mathfrak{x}^{\lambda}$ dar, wenn alle Differentiale $\delta\mathfrak{x}\lambda$ Null gleich sind.

(**B**) Wir betrachten $n$ Kreise

$$(1) \qquad {}_{(1)}\mathfrak{K},\ {}_{(2)}\mathfrak{K},\ \cdots,\ {}_{(n)}\mathfrak{K}$$

in $R_3$, die durch die beiden Kugelpaare

$$(2) \qquad {}_{(1)}\mathfrak{x}^{\alpha},\ {}_{(2)}\mathfrak{x}^{\alpha},\ \cdots,\ {}_{(n)}\mathfrak{x}^{\alpha} \qquad [\alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}]$$

dargestellt sind.

Wir definieren

$$(3) \qquad \begin{cases} {}_{(1)}A^{\alpha\beta} = ({}_{(1)}\mathfrak{x}^{\alpha}{}_{(1)}\mathfrak{x}^{\beta}), \quad {}_{(2)}A^{\alpha\beta} = ({}_{(2)}\mathfrak{x}^{\alpha}{}_{(2)}\mathfrak{x}^{\alpha}), \quad \cdots, \\ {}_{(n)}A^{\alpha\beta} = ({}_{(n)}\mathfrak{x}^{\alpha}{}_{(n)}\mathfrak{x}^{\alpha}) \end{cases}$$

und setzen

$$(4) \qquad \begin{cases} |{}_{(1)}A| = |{}_{(1)}A^{\alpha\beta}| > 0, \quad |{}_{(1)}A| = |{}_{(2)}A^{\alpha\beta}| > 0, \quad \cdots, \\ |{}_{(n)}A| = |{}_{(n)}A^{\alpha\beta}| > 0 \end{cases}$$

voraus.

Wir betrachten nun die Büscheltransformationen

$$(5) \qquad {}_{(1)}\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\lambda} = {}_{(1)}c^{\lambda}_{\mu(1)}\mathfrak{x}^{\mu},\ {}_{(2)}\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\lambda} = {}_{(2)}c^{\lambda}_{\mu(2)}\mathfrak{x}^{\mu},\ \cdots,\ {}_{(n)}\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\lambda} = {}_{(n)}c^{\lambda}_{\mu(n)}\mathfrak{x}^{\mu}.$$

Alle ${}_{(i)}c^{\lambda}_{\mu}$ in (5) sind unabhängig.

Ferner setzen wir

$$(6) \qquad {}_{(i,k)}S^{\alpha\lambda} = ({}_{(i)}\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha}\, {}_{(k)}\mathfrak{x}^{\lambda}), \qquad (i \neq k).$$

(6) sind die gemischten Tensoren, die sich nach

$$(7) \qquad {}_{(i,k)}S^{\alpha\lambda} = {}_{(i)}c^{\alpha}_{\beta}\, {}_{(k)}c^{\lambda}_{\mu}\, {}_{(i,k)}s^{\beta\mu}, \qquad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

transformieren.

Wir schliessen nun den Fall aus, dass die Matrix

$$(8) \qquad \| {}_{(i)}\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}, {}_{(i)}\mathfrak{x}^{\mathrm{II}}, {}_{(k)}\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}, {}_{(k)}\mathfrak{x}^{\mathrm{II}} \| \equiv 0$$

ist, wo eine Lineare der Formen

$$(9) \qquad {}_{(i)}\sigma_{\alpha}\, {}_{(i)}\mathfrak{x}^{\alpha} = {}_{(k)}\sigma_{\lambda}\, {}_{(k)}\mathfrak{x}^{\lambda}, \qquad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

gilt.

Die Bedeutung von (8) ist aber die, dass es eine Kugel

$$(10) \qquad \mathfrak{z} = {}_{(1)}\sigma_{\alpha}\, {}_{(1)}\mathfrak{x}^{\alpha} = {}_{(2)}\sigma_{\lambda}\, {}_{(2)}\mathfrak{x}^{\lambda} \dots = {}_{(n)}\sigma_{\mu}\, {}_{(n)}\mathfrak{x}^{\mu}$$

gibt, auf der $n$ Kreise liegen.

Wir bilden nun in $\alpha$ und $\beta$ den symmetrischen Tensor[1]

$$(11) \qquad {}_{(i,k)}T^{\alpha\beta} = {}_{(k)}A_{\lambda\mu}\, {}_{(i,k)}S^{\alpha\lambda}\, {}_{(i,k)}S^{\beta\mu} = {}_{(i,k)}S^{\alpha}_{\cdot\mu}\, {}_{(i,k)}S^{\beta\mu}.$$

Wir haben die Invarianten zu Folge:

$$(12) \qquad {}_{(i,k)}K = \frac{{}_{(i,k)}T}{{}_{(i)}A}, \qquad {}_{(i,k)}H = \tfrac{1}{2}\, {}_{(i,k)}T^{\alpha}_{\alpha},$$

wo

$$(13) \qquad {}_{(i,k)}K = \frac{{}_{(i,k)}S^{2}}{{}_{(i)}A_{(\mu}A}, \qquad {}_{(i,k)}H = \tfrac{1}{2}\, {}_{(i,k)}S_{\alpha\lambda}\, {}_{(i,k)}S^{\alpha\lambda}.$$

---

(1) Vergl. NAKAZIMA (=MATUMURA), S.: Differentialgeo. der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ. Vol. 34 (1931), S. 196.

# BEITRÄGE ZUR GEOMETRIE DER KREISE UND KUGELN (XXVI)

Sôzi MATUMURA

(Accepted for publication, June 2, 1938.)

Im folgenden mögen wir einige Sätze über die Kreise und Kugeln mitteilen.

## ( 1 )

(A) Wir betrachten

$$\eta = \cos\alpha \cdot \xi + \sin\alpha \cdot \xi', \tag{1}$$

wo $\alpha$ die Konstante ist.[1]

Wenn

$$\zeta = \cos\alpha \cdot \eta + \sin\alpha \cdot \eta' \tag{2}$$

gilt, so folgt aus (1), (2)

$$\begin{cases} \zeta = \cos\alpha\,(\cos\alpha \cdot \xi + \sin\alpha \cdot \xi') + \sin\alpha(\cos\alpha \cdot \xi' + \sin\alpha \cdot \xi'') \\ \quad = \cos^2\alpha \cdot \xi + 2\cos\alpha\sin\alpha \cdot \xi' + \sin^2\alpha \cdot \xi'' \\ \quad = \cos^2\alpha \cdot \xi + \sin 2\alpha \cdot \xi' + \sin^2\alpha \cdot \xi''. \end{cases} \tag{3}$$

Aus (1), (2) ist zu bestimmen

$$\begin{cases} \cos\alpha = (\eta\xi), \\ \cos\alpha = (\zeta\eta). \end{cases} \tag{4}$$

Aus (3) folgt

$$(\zeta\xi) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \cdot (\xi\xi'') = \cos 2\alpha, \tag{5}$$

[Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ. Formosa, Japan, Vol. XXI, No. 5, June, 1938.]

(1) THOMSEN, G.: Über konforme Geo. II, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ., IV Bd., S. 132.

denn

$$
(6) \qquad \begin{cases} (\xi\xi) = 1\,, \\ (\xi\xi') = 0\,, \\ (\xi\xi'') = -(\xi'\xi')\,, \\ (\xi\xi'') = -1 \end{cases}
$$

gelten.

Im allgemeinen folgt aus

$$
(7) \qquad \begin{cases} {}_{(1)}\eta = \cos\alpha\cdot{}_{(1)}\xi + \sin\alpha\,{}_{(1)}\xi'\,, \\ {}_{(2)}\eta = \cos\alpha\cdot{}_{(1)}\eta + \sin\alpha\,{}_{(1)}\eta'\,, \\ {}_{(3)}\eta = \cos\alpha\cdot{}_{(2)}\eta + \sin\alpha\,{}_{(2)}\eta'\,, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ {}_{(n)}\eta = \cos\alpha\cdot{}_{(n-1)}\eta + \sin\alpha\cdot{}_{(n-1)}\eta'\,, \end{cases}
$$

$$
(8) \qquad ({}_{(n)}\eta\xi) = \cos n\,\alpha\,.
$$

Gilt

$$
(9) \qquad \alpha \equiv d\alpha
$$

in

$$
(10) \qquad \eta = \cos\alpha\cdot\xi + \sin\alpha\cdot\xi'\,,
$$

so kommt zustande

$$
(11) \qquad {}_{(1)}\eta = \xi + d\alpha\cdot\xi'\,.
$$

Nehmen wir bis $(d\alpha)^3$ in $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ in Betracht, so folgt

$$
(12) \qquad {}_{(3)}\eta = \left\{1 - \frac{(d\alpha)^2}{\underline{|2}}\right\}\xi + \left\{d\alpha - \frac{(d\alpha)^3}{\underline{|3}}\right\}\xi'\,.
$$

Im allgemeinen nehmen wir bis $(d\alpha)^{2n}$ in $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ in Betracht, so folgt

$$(13)\qquad {}_{(2n)}\eta = \left\{1 - \frac{(da)^2}{\lfloor 2} + \frac{(da)^4}{\lfloor 4} - \dots + (-1)^n \frac{(da)^{2n}}{\lfloor 2n}\right\}\xi$$
$$+ \left\{\frac{(da)}{1} - \frac{(da)^3}{\lfloor 3} + \frac{(da)^5}{\lfloor 5} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{(da)^{2n-1}}{\lfloor 2n-1}\right\}\xi'.$$

(**B**) Sind

$$(1)\qquad \eta = \cos a\cdot\xi + \sin a\cdot\xi'$$

und $\mathfrak{y}$ zueinander senkrecht, so folgt

$$(2)\qquad \cos a\cdot(\xi\mathfrak{y}) + \sin a\cdot(\xi'\mathfrak{y}) = 0,$$

daraus ergibt sich

$$(3)\qquad \begin{cases}\cos a = \dfrac{-(\xi'\mathfrak{y})}{\sqrt{(\xi\mathfrak{y})^2 + (\xi'\mathfrak{y})^2}}, \\[2ex] \sin a = \dfrac{(\xi\mathfrak{y})}{\sqrt{(\xi\mathfrak{y})^2 + (\xi'\mathfrak{y})^2}},\end{cases}$$

wo $\eta$ und $\mathfrak{y}$ die Kreise in $R_2$ sind.

Nehmen wir $\alpha\mathfrak{y}^{\mathrm{I}} + \beta\eta^{\mathrm{II}}$ anstatt $\mathfrak{y}$, so folgt aus (3)

$$(4)\qquad \begin{cases}\cos a = \dfrac{-(\xi',\alpha\mathfrak{y}^{\mathrm{I}} + \beta\mathfrak{y}^{\mathrm{II}})}{\sqrt{(\xi,\alpha\mathfrak{y}^{\mathrm{I}} + \beta\mathfrak{y}^{\mathrm{II}})^2 + (\xi',\alpha\mathfrak{y}^{\mathrm{I}} + \beta\mathfrak{y}^{\mathrm{II}})^2}}, \\[2ex] \sin a = \dfrac{(\xi,\alpha\mathfrak{y}^{\mathrm{I}} + \beta\mathfrak{y}^{\mathrm{II}})}{\sqrt{(\xi,\alpha\mathfrak{y}^{\mathrm{I}} + \beta\mathfrak{y})^2 + (\xi',\alpha\mathfrak{y}^{\mathrm{I}} + \beta\mathfrak{y}^{\mathrm{II}})^2}},\end{cases}$$

wo $\mathfrak{y}^{\alpha}$ die Kreise in $R_2$, $\alpha$, $\beta$ die skalaren Gröszen sind.

Nehmen wir $\bar{\mathfrak{y}}$ anstatt $\mathfrak{y}$, so folgt

$$(5)\qquad \begin{cases}\cos a = \dfrac{-(\mathfrak{z}\xi')}{\sqrt{(\mathfrak{z}\xi)^2 + (\mathfrak{z}\xi')^2}}, \\[2ex] \sin a = \dfrac{(\mathfrak{z}\xi)}{\sqrt{(\mathfrak{z}\xi)^2 + (\mathfrak{z}\xi')^2}},\end{cases}$$

wo

$$(6)\qquad \bar{\mathfrak{y}} = \beta(\mathfrak{z}\xi)\,\xi - \mathfrak{z},$$

da $\mathfrak{z}$ ein nicht auf ihm gelegener Kreis und $\bar{\mathfrak{y}}$ der zu $\mathfrak{z}$ in bezug auf den Kreis inverse Kreis ist.

Ist $\mathfrak{y}$ ein Punkt und liegt auf $\xi$, so folgt aus (3)

$$(7)\qquad \sin\alpha = 0\,.$$

Wenn $\mathfrak{y}$ eine Funktion von dem Parameter $t$, so folgt aus (3)

$$(8)\qquad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{-(\xi',\mathfrak{y}(t))}{\sqrt{(\xi\mathfrak{y})^2+(\xi'\mathfrak{y})^2}}\,, \\ \sin\alpha = \dfrac{(\xi,\mathfrak{y}(t))}{\sqrt{(\xi\mathfrak{y})^2+(\xi'\mathfrak{y})^2}}\,. \end{cases}$$

Die Einhüllende der $\xi$ wollen wir $\mathfrak{v}$ nennen.

Ist $\varphi$ die Deviation von $\mathfrak{v}$, so folgt[1]

$$(9)\qquad \tan\varphi = \frac{1}{3}\,\frac{d\rho}{d\sigma}\,,$$

wo $\rho$ der Krümmungsranius von $\mathfrak{v}$ ist.

Wenn

$$\varphi \equiv \alpha\,,$$

so

$$(10)\qquad (\xi\mathfrak{y})\,/\,(\xi'\mathfrak{y}) = -\,d\rho\,/\,d\sigma\,.$$

Gilt

$$(11)\qquad \cos(\pi-\alpha)\cdot(\xi\mathfrak{z}) + \sin(\pi-\alpha)\cdot(\xi'\mathfrak{z}) = 0\,,$$

d. h.

$$(12)\qquad -\cos\alpha\cdot(\xi\mathfrak{z}) + \sin\alpha\cdot(\xi'\mathfrak{z}) = 0$$

anstatt (2), so folgt

$$(13)\qquad tg\,\alpha = (\xi\mathfrak{z}):(\xi'\mathfrak{z})\,.$$

Aus (2) ergibt sich

$$(14)\qquad tg\,\alpha = -\,(\xi\mathfrak{y}):(\xi'\mathfrak{y})\,,$$

so folgt aus (14), (14)

$$(15)\qquad (\xi\mathfrak{y})(\xi'\mathfrak{z}) + (\xi'\mathfrak{y})(\xi\mathfrak{z}) = 0\,.$$

---

(1) MATUMURA, S.: Über einen affingeo. Satz und die Deviation ebener Kurven, Tohoku Math. Journ., Vol. 36 (1933), p. 189.

(15) *ist die Bedingung dafür, dass* (2) *und* (12) *gelteu.*

(**C**) Wir betrachten

$$(1) \qquad \eta = \cos\alpha\cdot\xi + \sin\alpha\cdot\xi'$$

und

$$(2) \qquad \bar\eta = \cos\alpha\cdot\bar\xi + \sin\alpha\cdot\bar\xi'$$

so folgt

$$\begin{aligned}(3) \quad (\eta\bar\eta) &= \cos^2\alpha\ (\xi\bar\xi)+\sin\alpha\cos\alpha\,(\xi\bar\xi')+\sin\alpha\cos\alpha\,(\xi'\bar\xi)\\ &\quad + \sin^2\alpha\,(\xi'\bar\xi')=\cos^2\alpha\cdot(\xi\bar\xi)+\sin\alpha\cos\alpha\,\{(\xi\bar\xi')+(\xi'\bar\xi)\}\\ &\quad + \sin^2\alpha\,(\xi'\bar\xi')\,.\end{aligned}$$

Wenn

$$(4) \qquad (\eta\bar\eta) = (\xi\bar\xi)$$

gilt, so folgt aus (3)

$$(5) \qquad \sin\alpha\cdot\{(\eta\bar\eta) - (\xi'\bar\xi')\} = \cos\alpha\cdot\{(\xi\bar\xi') + (\xi'\bar\xi)\}\,,$$

daraus ergibt sich

$$(6) \qquad \tan\alpha = \{(\xi\bar\xi') + (\xi'\bar\xi)\} : \{(\eta\bar\eta) - (\xi'\bar\xi')\}\,,$$

d. h.

$$(7) \qquad \tan\alpha = \{\cos\phi_3 + \cos\phi_4\} : \{\cos\phi_1 - \cos\phi_2\}\,,$$

wo $\phi_1$ der Winkel zwischen $\xi\,(\eta)$ und $\bar\xi\,(\bar\eta)$, $\phi_2$ der zwischen $\bar\xi'$ und $\xi'$, $\phi_3$ der zwischen $\xi$ und $\bar\xi'$, $\phi_4$ der zwischen $\xi'$ und $\bar\xi$, $\alpha$ der zwischen $\xi\,(\bar\xi)$ und $\eta\,(\bar\eta)$, so folgt der

**Satz:** *Wenn* (4) *in* (1) *und* (2) *gilt, so kommt* (7) *zustande.*

(**D**) Aus

$$(1) \qquad \begin{cases}\eta = \cos\alpha\cdot\xi + \sin\alpha\cdot\xi'\,,\\ \bar\eta = \cos\alpha\cdot\bar\xi + \sin\alpha\cdot\bar\xi'\end{cases}$$

folgt

$$(2) \qquad \{\eta \pm \bar\eta\} = \cos\alpha\cdot\{\xi \pm \bar\xi\} + \sin\alpha\cdot\{\xi' \pm \bar\xi'\}\,,$$

so ist zu erhalten

$$(3)\qquad (\eta \pm \bar{\eta},\ \xi \pm \bar{\xi}) = \cos\alpha\,;$$

wenn

$$(4)\qquad (\xi \pm \dot{\xi},\ \xi' \pm \bar{\xi}') = (\ddot{\xi}\xi') \pm (\xi\ddot{\xi}') = 0\,,$$

so kann man sagen, *der Winkel zwischen* $\eta\pm\bar{\eta}$ *und* $\xi\pm\ddot{\xi}$ *sei gleich* $\alpha$, *wenn* (4) *gilt.*

(**E**) Wenn

$$(1)\qquad \eta = \cos\alpha\cdot\tilde{\xi} + \sin\alpha\cdot\tilde{\xi}'$$

und

$$\mathfrak{y}$$

einander berühren, so folgt

$$(2)\qquad \cos\alpha\cdot(\tilde{\xi}\mathfrak{y}) + \sin\alpha\cdot(\mathfrak{y}\tilde{\xi}') = 1\,,$$

d. h.

$$(3)\qquad \cos\alpha\cdot(\tilde{\xi}\mathfrak{y}) + \sin\alpha\cdot(\tilde{\xi}'\mathfrak{y}) = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha\,,$$

daraus ergibt sich

$$(4)\qquad \tan\alpha = -\ \{(\tilde{\xi}\mathfrak{y}) - \cos\alpha\} : \{(\tilde{\xi}'\mathfrak{y}) - \sin\alpha\}\,.$$

*In unserem Falle müssen wir* $\alpha$ *aus* (4) *suchen.*

(**F**) Gilt

$$(1)\qquad \eta \equiv \bar{\eta}$$

für

$$(2)\qquad \eta = \cos\alpha\cdot\xi + \sin\alpha\cdot\xi'$$

und

$$(3)\qquad \bar{\eta} = \cos\alpha\cdot\dot{\xi} + \sin\alpha\cdot\bar{\xi}'\,,$$

so ist zu bekommen

$$(4)\qquad \cos\alpha\cdot\xi + \sin\alpha\cdot\xi' = \cos\alpha\cdot\xi' = \cos\alpha\cdot\bar{\xi} + \sin\alpha\cdot\bar{\xi}'$$

d. h.

$$(5)\qquad \cos\alpha\cdot\{\xi - \ddot{\xi}\} + \sin\alpha\cdot\{\xi' - \bar{\xi}'\} = 0\,,$$

so folgt der

**Satz:** *Wenn zwei Kreise $\xi$ und $\bar{\xi}$ mit einem Kreise $\eta$ einen gleichen Winkel $\alpha$ bilden, so kommt* (5) *zustande.*

Aus (2), (3) kann man wissen, dasz

$$(6) \qquad \eta^{\alpha} = \cos\alpha \cdot \xi^{\alpha} + \sin\alpha \cdot \{\xi^{\alpha}\}', \qquad [\alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}]$$

gelten, wo $\eta^{\alpha}$, $\xi^{\alpha}$ die Kreisbüschel sind.

(**G**) Wir betrachten

$$(1) \qquad \eta = \cos\alpha \cdot \xi + \sin\alpha \cdot \xi'$$

und

$$(2) \qquad \bar{\eta} = \cos\alpha \cdot \bar{\xi} + \sin\alpha \cdot \bar{\xi}'$$

so folgt aus (1) und (2)

$$(3) \qquad (\eta\bar{\eta}) = \cos^2\alpha \cdot (\xi\bar{\xi}) + \sin\alpha\cos\alpha\,(\xi\bar{\xi}') + \sin\alpha\cos\alpha\,(\bar{\xi}\xi') + \sin^2\alpha\,(\xi'\bar{\xi}').$$

Wenn

$$(4) \qquad (\eta\bar{\eta}) = 0, \qquad (\xi\bar{\xi}) = 0$$

gelten, so ergibt sich

$$(5) \qquad \cos\alpha \cdot (\bar{\xi}\xi') + \cos\alpha \cdot (\xi\bar{\xi}') + \sin\alpha \cdot (\xi'\bar{\xi}') = 0,$$

d. h.

$$(6) \qquad \tan\alpha = -\,\{(\bar{\xi}\xi') + (\xi\bar{\xi}')\} : (\xi'\bar{\xi}').$$

(**H**) Wir betrachten

$$(1) \qquad \eta = \cos\alpha \cdot \xi + \sin\alpha \cdot \xi',$$

so folgt

$$(2) \qquad 2\cos\alpha \cdot \eta = 2\cos^2\alpha \cdot \xi + 2\sin\alpha\cos\alpha \cdot \xi',$$

daraus ergibt sich

$$(3) \qquad 2\cos\alpha \cdot \eta = \{1 + \cos 2\alpha\} \cdot \xi + \sin 2\alpha \cdot \xi'$$

oder

$$(4) \qquad 2\cos\alpha \cdot \eta = \{\cos 2\alpha \cdot \xi + \sin 2\alpha \cdot \xi'\} + \xi.$$

Nun setzen wir

$$(5)\qquad \zeta = \cos 2\alpha \cdot \xi + \sin 2\alpha \cdot \xi',$$

so folgt aus (4)

$$(6)\qquad 2\cos\alpha \cdot \eta = \zeta + \xi$$

d. h.

$$(7)\qquad \eta = \{\zeta + \xi\} : 2\cos\alpha .$$

In unserem Falle gilt (7), wo $\zeta$ der Kreis ist, der mit $\xi$ den Winkel $2\alpha$ bildet, und $\eta$ der Kreis, der mit $\xi$ den Winkel $\alpha$ bildet.

(I) Aus

$$(1)\qquad \eta = \cos\alpha \cdot \xi + \sin\alpha \cdot \xi'$$

und

$$(2)\qquad \bar{\eta} = \cos\alpha\, \bar{\xi} + \sin\alpha \cdot \xi'$$

ergibt sich

$$(3)\qquad \sin\alpha = \{(\xi\eta) - (\bar{\xi}\eta)\} : \{(\xi\xi') - (\bar{\xi}\xi')\}$$

und

$$(4)\qquad \cos\alpha = \{(\eta\xi') - (\bar{\eta}\xi')\} : \{(\xi\xi') - (\bar{\xi}\xi')\} .$$

## ( 2 )

(**A**) Wir betrachten

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathfrak{u}_1 = a_{11}\mathfrak{v}_1 + a_{12}\mathfrak{v}_2 + \dots + a_{1n}\mathfrak{v}_n \\ \mathfrak{u}_2 = a_{21}\mathfrak{v}_1 + a_{22}\mathfrak{v}_2 + \dots + a_{2n}\mathfrak{v}_n \\ \dots\dots\dots \\ \mathfrak{u}_m = a_{m1}\mathfrak{v}_1 + a_{m2}\mathfrak{v}_2 + \dots a_{mn}\mathfrak{v}_n \end{cases}$$

und

$$(2)\quad \begin{cases} \mathfrak{v}_1 = \beta_{11}\mathfrak{w}_1 + \beta_{12}\mathfrak{w}_2 + \dots + \beta_{1p}\mathfrak{w}_p \\ \mathfrak{v}_2 = \beta_{21}\mathfrak{w}_1 + \beta_{22}\mathfrak{w}_2 + \dots + \beta_{2p}\mathfrak{w}_p \\ \dots\dots\dots \\ \mathfrak{v}_n = \beta_{n1}\mathfrak{w}_1 + \beta_{n2}\mathfrak{w}_2 + \dots + \beta_{np}\mathfrak{w}_p \end{cases}$$

so folgt

$$(3)\quad \begin{cases} \mathfrak{u}_1 = \eta_{11}\mathfrak{w}_1 + \eta_{12}\mathfrak{w}_2 + \dots + \eta_{1p}\mathfrak{w}_p \\ \mathfrak{u}_2 = \eta_{21}\mathfrak{w}_1 + \eta_{22}\mathfrak{w}_2 + \dots + \eta_{2p}\mathfrak{w}_p \\ \dots\dots\dots \\ \mathfrak{u}_m = \eta_{m1}\mathfrak{w}_1 + \eta_{m2}\mathfrak{w}_2 + \dots + \eta_{mp}\mathfrak{w}_p \end{cases}$$

wo $\mathfrak{u}_i$, $\mathfrak{v}_i$, $\mathfrak{w}_i$ die Kugeln in $R_n$, $m < n$, $p < n$ sind.

Da sind $\alpha_{ik}$, $\beta_{ik}$, $\eta_{ik}$ die skalaren Gröszen.

Rechnet man die $\eta$ aus, so findet man

$$(4)\qquad \eta_{ik} = \alpha_{i1}\beta_{1k} + \alpha_{i2}\beta_{2k} + \dots + \alpha_{in}\beta_{nk} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_{jk}\,.$$

Da gilt

$$(5)\qquad H = AB\,,$$

wo die Matrix $H = \{\eta_{ik}\}$, die Matrix $A = \{\alpha_{ik}\}$, die Matrix $B = \{\beta_{ik}\}$ ist.

(**B**) Wir betrachten[1]

$$v^0 (X_1^2 + \dots + X_n^2) - 2v^1X_1 - 2v^2X_2 - \dots - 2v^nX_n - 2v^{n+1} = 0$$

und nehmen $v^\alpha$ anstatt $\xi$ in TAKASUs Arbeit,[2] so kann man untersuchen wie in TAKASUs Arbeit.

(**C**) Indem man

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 - 2u_0u_5 \equiv G_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta$$

(1) KAWAGUTI, A.: Riemannian Geometry, Iwanami Kôza XI, § 5 p. 114.
(2) TAKASU, T.: Differentialkugelgeometrie, Tôhoku Imp. Univ., Vol. XVII (1928) p. 220–571.

in GRÜNWALDS Arbeit[1] setzt, kann man untersuchen wie in KAWAGUTIS Arbeit.[2]

(**D**) Die folgenden Zeilen bilden eine Fortsetzung der in Tôhoku Math. Journ. erschienenen Arbeit[3] „Differentialgeometrie der Kreisscharen, X, XI, XII", § XII, deren Kenntnis daher vorausgesetzt wird.

Für $(dx, dy)$ auf $(g)$, die

$$dx / Q = \{dy / -P\} > 0$$

erfüllt, gilt

$$dx / pQ - qP = (dy / p_1Q - q_1P) > 0$$

auf XY -Ebene, wo

$$X = f(x, y), \qquad Y = g(x, y)$$

gilt.[4]

Da kommt zustande

$$\begin{aligned}
p &\equiv \partial f / \partial x = 2(T^{11}x + T^{12}y), \\
q &\equiv \partial f / \partial y = 2(T^{12}x + T^{22}y), \\
p_1 &\equiv \partial g / \partial x = 2(A^{11}x + A^{12}y), \\
q_1 &\equiv \partial g / \partial y = 2(A^{12}x + A^{22}y), \\
P &= 4T^{11}(A^{12}x + A^{22}y) + 4A^{12}(T^{12}y + T^{11}x) \\
&\quad - 4T^{12}(A^{11}x + A^{12}y) - 4A^{11}(T^{12}x + T^{22}y), \\
Q &= 4T^{12}(A^{12}x + A^{22}y) + 4A^{22}(T^{11}x + T^{12}y) \\
&\quad - 4T^{22}(A^{11}x + A^{12}y) - 4A^{12}(T^{12}x + T^{22}y).
\end{aligned}$$

(1) GRÜNWALD, J.: Ein Abbildungsprinzip etc., Sitzungsberichten der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, Math.-naturw. Klasse; Bd. CXXIII, Abt. II a. April 1914, S. 1.

(2) Vgl. (2) in (B).

(3) NAKAZIMA, S.: Differentialgeometrie der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ. 34 (1931), p. 205.

(4) Vergl. etwa J. HADAMARD: On ordinary Restricted Extrema in connection with Point Transformations, Bulletin of the American Math. Society, Vol. XXXV, p. 825.

(**E**) Wir nennen eine Kugel $\mathfrak{x}(u,v)$ „*harmonisch*“, wenn $\mathfrak{x}(u,v)$ die Gleichung

$$\Delta\mathfrak{x} \equiv \frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial v^2} = 0 \tag{1}$$

befriedigt.

Aus

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = 1 \tag{2}$$

folgt

$$\begin{cases} (\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_u) + (\mathfrak{x}\mathfrak{x}_{uu}) = 0\,, \\ (\mathfrak{x}_v\mathfrak{x}_v) + (\mathfrak{x}\mathfrak{x}_{vv}) = 0\,, \end{cases} \tag{3}$$

daraus ergibt sich

$$(\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_u) + (\mathfrak{x}_v\mathfrak{x}_v) = 0\,, \tag{4}$$

wo $u$, $v$ die Parameter sind.

Der Winkel $\varphi$ zwischen $\mathfrak{x}_u$ und $\mathfrak{x}_v$ ist

$$\cos^2\varphi = \frac{(\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v)^2}{(\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_u)(\mathfrak{x}_v\mathfrak{x}_v)} = -\frac{(\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v)^2}{(\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_u)^2}\,. \tag{5}$$

In unsrem Falle sind unsere beiden invarianten Differentialen längs der Krümmungslinien mit

$$\begin{cases} d\psi = \sqrt{\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_u}\; du\,, \\ d\bar{\psi} = \sqrt{-\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_u}\; dv \end{cases} \tag{6}$$

gegeben.(1)

Gilt

$$\begin{cases} \mathfrak{x}_u = \mathfrak{y}_v\,, \\ \mathfrak{x}_v = -\,\mathfrak{y}_u \end{cases} \tag{7}$$

in (1), so folgt

$$J \equiv \mathfrak{x}_u^2 + \mathfrak{y}_u^2 = \mathfrak{x}_v^2 + \mathfrak{y}_v^2\,, \tag{8}$$

(1) BLSCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie, III (1929), S. 302.

wo

$$(9)\qquad J \equiv \mathfrak{x}_u\mathfrak{y}_v - \mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_u$$

ist.

Die asymptotischen Richtungen der Umhüllungsflächen von $\mathfrak{y}=\mathfrak{y}(u,v)$ sind mit

$$(10)\qquad \mathfrak{x}_{uu}du^2 + 2\,\mathfrak{x}_{uv}dudv + \mathfrak{x}_{vv}dv^2 = 0$$

gegeben,[1] wo $\mathfrak{y}$ die Kugel ist.

Setzen wir

$$(11)\qquad \xi = \mathfrak{x}(u,v), \quad \eta = \mathfrak{y}(u,v),$$

so folgt

$$(12)\qquad d\xi = \mathfrak{x}_u du + \mathfrak{x}_v dv, \quad d\eta = \mathfrak{y}_u du + \mathfrak{y}_v dv,$$

daraus ergibt sich

$$(13)\qquad (d\xi d\eta) = (\mathfrak{x}_u\mathfrak{y}_u)\,du^2 + \{(\mathfrak{x}_u\mathfrak{y}_v) + (\mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_u)\}\,dudv + (\mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_v)\,dv^2.$$

Sind $d\xi$ und $d\eta$ zueinander senkrecht, so gilt

$$(14)\qquad (\mathfrak{x}_u\mathfrak{y}_u)\,du^2 + \{(\mathfrak{x}_u\mathfrak{y}_v) + (\mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_u)\}\,dudv + (\mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_v)\,dv^2 = 0.$$

(**F**) Es sei eine allgemeine Kugelkongruenz

$$\xi = \xi(u^1, u^2), \quad \xi\xi = 1, \quad u^1 = u, \quad u^2 = v,$$

und die beiden Enveloppenmäntel derselben

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^1, u^2), \quad (\mathfrak{x}\mathfrak{x} = 0)$$
$$\bar{\mathfrak{x}} = \bar{\mathfrak{x}}(u^1, u^2), \quad (\bar{\mathfrak{x}}\bar{\mathfrak{x}} = 0)$$

gegeben.

Wenn

$$g_{\alpha\beta} \equiv \xi_\alpha\xi_\beta \equiv 0,$$

so sind die beiden Enveloppenmäntel die isotropen Flächen.

Aus $\xi_\alpha\xi_\beta \equiv 0$ folgt

(1) LEWY, H.: Differential geometry in the large, Transactions of the American Matnematical Society, Vol. 43 (1938), p. 259.

$$\xi_\alpha \xi_{\beta\gamma} = 0$$

für alle Werte der Indizes $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

Für $g_{\alpha\beta} \equiv 0$, nicht alle $g_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv 0$, gelten die einfach totalisotropen Flächen.

Für $g_{\alpha\beta} \equiv 0$, $g_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv 0$, nicht alle $g_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon} \equiv 0$, gelten die zweifach totalisotropen Flächen.

Für

$$g_{\alpha\beta} \equiv 0\,, \quad g_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} \equiv 0, \quad \ldots$$

$$g\alpha_1\,, \quad \ldots\alpha_k\,, \quad \alpha_{k+1}\,, \quad \ldots\,, \quad \alpha_{2k} = 0\,,$$

nicht alle

$$g\alpha_1\,, \quad \ldots\alpha_{k+1}\,, \quad \alpha_{k+2}\,, \quad \alpha_{2k+2} \equiv 0\,,$$

gelten die $k$-fach totalisotropen Flächen.

(**G**)

$$(1) \qquad \mathfrak{x} = \mathfrak{x} + 2\,t\mathfrak{z}^{(1)} + 2t^2\mathfrak{z}^{(2)} + \ldots$$

stelle eine Verbiegung der Kugel $\mathfrak{x}$ dar.

Dann wird durch

$$(2) \qquad d\sum t^\nu\mathfrak{z}^{(\nu)} = (\sum t^\nu\mathfrak{y}^{(\nu)} \times d\,(\mathfrak{x} + \sum t^\nu\mathfrak{z}^{(\nu)})$$

der Verbiegung *n-ter* Stufe eine Kugel

$$(3) \qquad \mathfrak{y} = \mathfrak{y}^{(n)}(u, v)$$

zugeordnet.

Die Bestimmung der $\mathfrak{y}^{(n)}$ erfolgt successive aus den

$$(4) \qquad \mathfrak{y}^{(1)}, \ \ldots, \ \mathfrak{y}^{(n-1)}$$

vermöge eines Systems von zwei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Hier benutzen wir das Vorzeichen in REMBS Arbeit.[1]

(**H**) Bezeichnet man den Winkel, unter welchem der Kreis $(b, b')$

(1) REMBS, E.: Verbiegungen höherer Ordnung nnd ebene Flächenrinnen, Math. Z. 36, 110—121.

zur Kugel ($\xi$) geneigt ist, mit V, so ist leicht beweisbar,[1] dasz

$$(1) \qquad \cos^2 V = (\xi b)^2 + (\xi b')^2$$

ist.

Nun nehmen wir

$$(2) \qquad \begin{cases} b \equiv \mathfrak{x}(t), \\ b' \equiv \mathfrak{x}(t) + \dot{\mathfrak{x}}(t)\, dt \end{cases}$$

in (1), so folgt

$$(3) \qquad \begin{aligned} \cos^2 V &= (\xi \mathfrak{x})^2 + \{(\xi b) + (\xi \dot{\mathfrak{x}})\, dt\}^2 \\ &= 2(\xi \mathfrak{x})^2 + 2(\xi b)(\xi \dot{\mathfrak{x}})\, dt + (\xi \dot{\mathfrak{x}})^2 (dt)^2, \end{aligned}$$

so kann man sagen, dasz der Winkel V zwischen dem Kreise $\{\mathfrak{x}, \mathfrak{x} + \dot{\mathfrak{x}}\, dt\}$ und der Kugel $\xi$ mit (3) gegeben ist.

Nehmen wir

$$(4) \qquad \begin{cases} b = a \cos \alpha + a' \sin \alpha \\ b' = c \cos \beta + c' \sin \beta \end{cases}$$

in (1), so folgt

$$(5) \qquad \begin{aligned} \cos^2 V &= \{(\xi a) \cos \alpha + (\xi a') \sin \alpha\} + \{(\xi c) \cos \beta + (\xi c') \sin \beta\}^2 \\ &= (\xi a) \cos^2 \alpha + (\xi a')^2 \sin^2 \alpha + 2(\xi a)(\xi a') \sin \alpha \cos \alpha \\ &\quad + (\xi c)^2 \cos^2 \beta + (\xi c')^2 \sin^2 \beta + 2(\xi c)(\xi c') \sin \beta \cos \beta. \end{aligned}$$

Gilt

$$(6) \qquad b' = a' \cos \alpha + a'' \sin \alpha$$

in (5), so folgt

$$(7) \qquad \begin{aligned} \cos^2 V &= (\xi a)^2 \cos^2 \alpha + (\xi a')^2 \sin^2 \alpha + 2(\xi a)(\xi a') \sin \alpha \cos \alpha \\ &\quad + (\xi a')^2 \cos^2 \alpha + (\xi a'')^2 \sin^2 \alpha + 2(\xi a'')(\xi a') \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned}$$

Ist

$$(8) \qquad b' = \sin \alpha - a' \cos \alpha$$

in (5), so folgt

(1) TAKASU, T.: Differentialgeometrien in den Kugelräumen, Bd. 1, (2938), Tokyo, S. 364.

$$
\begin{aligned}
(9) \qquad \cos^2 V &= (\mathfrak{x}a)^2 \cos^2 \alpha + (\mathfrak{x}a')^2 \sin^2 \alpha + 2\,(\mathfrak{x}a)\,(\mathfrak{x}a') \sin\alpha \cos\alpha \\
&\quad + (\bar{\mathfrak{x}}a)^2 \sin^2 \alpha + (\bar{\mathfrak{x}}a')^2 \cos^2 \alpha - 2\,(\bar{\mathfrak{x}}a)\,(\bar{\mathfrak{x}}a') \sin\alpha \cos\alpha \\
&= (\mathfrak{x}a)^2 + (\mathfrak{x}a')^2 .
\end{aligned}
$$

(I) Im folgenden mögen wir die Kreisgeometrie in $R_2$ untersuchen.

Wir betrachten

$$(1) \qquad \mathfrak{y} = (\mathfrak{z}\mathfrak{x})\,\mathfrak{x} + (\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{x}})\,\bar{\mathfrak{x}} ,$$

so folgt

$$(2) \qquad \begin{cases} (\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = (\mathfrak{z}\mathfrak{x}) , \\ (\bar{\mathfrak{x}}\mathfrak{y}) = (\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{x}}) , \end{cases}$$

daraus ergibt sich

$$(3) \qquad \begin{cases} \cos \phi_1 = \cos \varphi_1 , \\ \cos \phi_2 = \cos \varphi_2 , \end{cases}$$

wo $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{x}$, $\bar{\mathfrak{x}}$ und $\mathfrak{z}$ die Kreise in $R_2$, $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ zueinander senkrecht sind.

In den oben geschriebenen Gleichungen ist $\varphi_1$ der Winkel zwischen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, $\varphi_1$ der Winkel zwischen $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{x}$, $\phi_2$ der Winkel zwischen $\bar{\mathfrak{x}}$ und $\mathfrak{y}$, $\varphi_2$ der Winkel zwischen $\mathfrak{z}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$.

Weiter kann man finden:

$$(4) \qquad (\mathfrak{z}\mathfrak{y}) = (\mathfrak{z}\mathfrak{x})^2 + (\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{x}})^2,$$

daraus ergibt sich

$$(5) \qquad \cos \psi_1 = \cos^2 \psi_2 + \cos^2 \psi_3$$

wo $\psi_1$ der Winkel zwischen $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{y}$, $\psi_2$ der Winkel zwischen $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{x}$, $\psi_3$ der Winkel zwischen $\mathfrak{z}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ ist.

Man kann

$$(6) \qquad \mathfrak{y} = (\mathfrak{z}\mathfrak{x})\,\mathfrak{x} + (\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{x}})\,\bar{\mathfrak{x}} + (\mathfrak{z}\bar{\bar{\mathfrak{x}}})\,\bar{\bar{\mathfrak{x}}} + \dots$$

untersuchen wie oben, wo

$$(7) \qquad \begin{cases} \mathfrak{x} \perp \bar{\mathfrak{x}}, \quad \mathfrak{x} \perp \bar{\bar{\mathfrak{x}}}, \quad \dots , \\ \bar{\mathfrak{x}} \perp \bar{\bar{\mathfrak{x}}}, \quad \dots\dots\dots . \end{cases}$$

(**J**) $\mathfrak{z}$ und $\bar{\mathfrak{z}}$ in

$$(1) \qquad i\mathfrak{z} = \mathfrak{x} + i\mathfrak{y}\,,$$

$$(2) \qquad i\bar{\mathfrak{z}} = \mathfrak{x} - i\mathfrak{y}$$

bezeichnen die Kreise in $R_2$, wo $\mathfrak{x}$ ein Punkt, der auf dem Kreise $\mathfrak{y}$ in $R_2$ liegt.

Aus (1), (2) folgt

$$(3) \qquad -(\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}) = (\mathfrak{x}\mathfrak{x}) + (\mathfrak{y}\mathfrak{y}) = 1\,,$$

so kann man wissen, dasz $\mathfrak{z}$ und $\bar{\mathfrak{z}}$ einander berühren, wo $i=\sqrt{-1}$ ist.

Aus (1), (2) esgibt sich

$$(4) \qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = \{\mathfrak{z} + \bar{\mathfrak{z}}\}\, i : 2\,, \\ \mathfrak{y} = \{\mathfrak{z} - \bar{\mathfrak{z}}\} : 2\,, \end{cases}$$

daraus folgt:

$$\{\mathfrak{z} + \mathfrak{z}\}\, i : 2$$

bedeute einen Punkt in $R_2$,

$$\{\mathfrak{z} - \bar{\mathfrak{z}}\} : 2$$

bedeute einen Kreis in $R_2$.

Aus (1) folgt

$$(5) \qquad i(\mathfrak{z}\mathfrak{x}) = (\mathfrak{x}\mathfrak{y}) + i(\mathfrak{y}\mathfrak{x}) = 0\,,$$

so kann man wissen, dasz $\mathfrak{x}$ auf $\mathfrak{z}$ liegt.

Von $\mathfrak{x}$, $\bar{\mathfrak{z}}$ gilt das gleiche.

(**K**) Im folegenden mögen wir THOMSENs Arbeit[1] untersuchen. Wir können

$$(1) \qquad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{\rho} = \sqrt{\frac{(d\xi d\xi)}{(d\mathfrak{v} d\mathfrak{v})}}$$

setzen.

Aus (1) ergibt sich

(1) THOMSEN, G.: Über konforme Geo., II, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamburgischen Univ., IV Bd., S. 126.

$$(2) \qquad dt = \rho d\sigma = \sqrt{\frac{(d\mathfrak{v}d\mathfrak{v})}{(d\xi d\xi)}}\, d\sigma .$$

$$\therefore \quad t = \int \sqrt{\frac{(d\mathfrak{v}d\mathfrak{v})}{(d\xi d\xi)}}\, d\sigma$$

Wenn $\mathfrak{v}$ eine Eilinie ist, deren Inhalt A gleich ist, so kommt zustande

$$(3) \qquad \oint \sqrt{\frac{(d\mathfrak{v}d\mathfrak{v})}{(d\xi d\xi)}}\, d\sigma : 4\pi \geqq \mathrm{A} .$$

Weiter gilt[1]

$$(4) \qquad \sqrt{\frac{(d\mathfrak{v}d\mathfrak{v})}{(d\xi d\xi)}} = 3 \int \tan\varphi\, dt ,$$

d. h.

$$(5) \qquad \frac{d}{dt} \sqrt{\frac{(d\mathfrak{v}d\mathfrak{v})}{(d\xi d\xi)}} = 3 \tan\varphi ,$$

oder

$$(6) \qquad \frac{1}{3}\, \frac{d}{dt} \sqrt{\frac{(d\mathfrak{v}d\mathfrak{v})}{(d\xi d\xi)}} = \tan\varphi ,$$

d. h.

$$(7) \qquad \varphi = \tan^{-1} \left\{ \frac{1}{3}\, \frac{d}{dt} \sqrt{\frac{(d\mathfrak{v}d\mathfrak{v})}{(d\xi d\xi)}} \right\} ,$$

wo $\varphi$ die Deviation von $\mathfrak{v}$ ist.

## ( 3 )

Die folgenden Zeilen bilden eine Fortsetzung der in dieser Zeitschrift erschienenen Arbeit[2] „*Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln* (V)“ § 1, deren Kenntnis daher vorausgesetzt wird.

(**A**) Gilt

(1) MATUMURA, S.: Über einen affingeometrischen Satz und die Deviation ebener Kurven, Tôhoku Math. Journ. 36 (1933), p. 189.

(2) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geo. der Kreise und Kugeln (V), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. V, S. 303, § 1.

(1) $\quad T^{\alpha\beta} = \text{const.}\ (=k^2)$

in

(2) $\quad \cos^2\varphi = T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta\,,$

so folgt

(3) $\quad \cos^2\varphi = k^2(\rho_1 + \rho_2)^2,$

d. h.

(4) $\quad \cos\varphi = \pm\ k(\rho_1 + \rho_2)\,.$

Gilt

(5) $\quad (T^{12})^2 - T^{11}T^{22} < 0$

in (1), so nimmt $\cos^2\varphi$ den Wert imaginär.

(**B**) Wir betrachten

(1) $\quad \cos^2\varphi = T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta$

und setzen

(2) $\quad f = \cos^2\varphi = T^2_\rho = T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta$

wie üblich.

Wenn $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so

(3) $\quad f = 0$

Hat (3) eine Doppelwurzel, so ist

(4) $\quad D = (T^{12})^2 - T^{11}T^{22} = 0\,.$

Wenn wir die 2 Veränderlichen $\rho_i$ einer linearen Transformation $\rho \to \bar{\rho}$ folgendermaszen unterwerfen:

(5) $\quad \rho_i \sum_k e_i^k \bar{\rho}_k\,,$

so erhalten wir leicht aus (5)

(6) $\quad \bar{D} = (\bar{T}^{12})^2 - \bar{T}^{11}\bar{T}^{22} = \Delta^2 \cdot D\,.$

Ist also $D=0$, so ist auch $\bar{D}=0$, d. h. die Eigenschaft, ein volles Quadrat zu sein, ist auch bei $\bar{f}$ vorhanden; sie ist bei $\rho \to \bar{\rho}$ nicht

zerstört oder invariant. D ist eine Invariante der Form $f$ oder auch D=0 ist bekanntlich eine bei $\rho \rightarrow \bar{\rho}$ invariante Gleichung.

Setzen wir

$$(7) \qquad f_1 = T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta ,$$

$$(8) \qquad f_2 = \bar{T}^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta ,$$

so folgt

$$(9) \qquad \Delta_1 = 2\,\{T^{11}T^{22} - (T^{12})^2\} ,$$

$$(10) \qquad \Delta_2 = 2\,\{\bar{T}^{11}\bar{T}^{22} - (\bar{T}^{12})^2\},$$

$$(11) \qquad \Delta_{12} = T^{11}\bar{T}^{22} - 2\,T^{12}\bar{T}^{12} + T^{22}\bar{T}^{11} ,$$

$$(12) \qquad R = \Delta_1\Delta_2 - \Delta_{12}^{2} ,$$

wo $\Delta_1$, $\Delta_2$ die Diskriminanten von $f_1$ und $f_2$, $\Delta_{12}$ eine simultane Invariante von $f_1$ und $f_2$, R die Resultante der beiden Formen $f_1$ und $f_2$ ist.

Bildet man mit Hilfe des Parameters $t$ die neue quadratische

$$(13) \qquad f = f_1 + tf_2 ,$$

so ist deren Diskriminante

$$(14) \qquad \Delta = \Delta_1 + 2\Delta_{12}\,t + \Delta_2 t^2 .$$

(C) Wir betrachten

$$(1) \qquad \cos^2\varphi = T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta .$$

Ist nun für die beliebige Wahl der Urvariablen

$$(2) \qquad T^{\alpha\beta} = a^\alpha a^\beta ,$$

so kann man

$$(3) \qquad \cos^2\varphi = a^\alpha a^\beta\rho_\alpha\rho_\beta$$
$$= a^\alpha\rho_\alpha \cdot a^\beta a_\beta$$

setzen.

Aus (3) kann man wissen, dasz wir

$$(4) \qquad \cos\varphi = a^\alpha\rho_\alpha$$

setzen können, wo $\varphi$ zwischen der Kugel und dem Kreise in $R_3$ ist.

Wenn $a^\alpha \rho_\alpha = 0$ gilt, so sind der Kreis und die Kugel in $R_3$ zueinander senkrecht.

(**D**) Wir setzen

$$(1) \qquad \cos^2\varphi = T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta$$

in

$$(2) \qquad \cos^2\varphi = v^\beta\rho_\beta$$

und untersuchen von dem Standpunkt der halbsymmetrischen Übertragungen aus.

Für die geodätische Differentiation einer Überschiebung gilt die Gleichung

$$(3) \qquad \delta(\cos^2\varphi) = \rho_\beta\delta v^\beta + v^\beta\delta\rho_\beta - c_{\mu\alpha}^{\cdot\cdot\lambda}\rho_\lambda v^\alpha dx^\mu ,$$

wo $x^\nu$ die Urvariablen sind.

Ist die Übertragung überschiebungsinvariant, so folgt

$$(4) \qquad c_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} = 0 .$$

Ist die Übertragung inzidenzinvariant, so hat $c_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu}$ die Form

$$(5) \qquad c_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} = c_\mu A_\lambda^\nu ,$$

wo $c_\lambda$ ein beliebiger Vektor ist.

In unsrem Falle gilt

$$(6) \qquad v^\beta\rho_\beta = 0 ,$$

wenn $v^\beta$ und $\rho_\beta$ zueinander pseudoparallel um $dx^\nu$ verschoben werden.

Wir betrachten

$$(7) \qquad \cos^2\varphi + \frac{d\cos^2\varphi}{d\rho_\beta} + 1 = 0 ,$$

so folgt

$$(8) \qquad T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta + 2T^{\alpha\beta}\rho_\alpha + 1 = 0 .$$

$$(9) \qquad \rho' = \frac{P_\lambda^\alpha\rho_\alpha}{Q^\beta\rho_\beta + 1}$$

sind die projektiven Transformationen, die eine Gruppe bilden.

(**E**) Wenn

$$(1) \qquad D^{\alpha\beta} = \mu T^{\alpha\beta} - \nu A^{\alpha\beta}$$

in

$$(2) \qquad \cos^2\varphi = \{T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta\} : \{A^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta\}$$

gilt, so kommt zustande

$$(3) \qquad \{D^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta\} : \{A^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta\} = \mu\cos^2\varphi - \nu,$$

denn aus (1) ist zu erhalten

$$(4) \qquad \{D^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta\} : \{A^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta\} = \mu\,\{T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta\} : \{A^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta\} - \nu.$$

Gilt

$$(5) \qquad D^{\alpha\beta} \text{ prop. } A^{\alpha\beta},$$

so folgt

$$(6) \qquad D^{\alpha\beta} = \lambda A^{\alpha\beta},$$

daraus kommt aus (1) zustande

$$(7) \qquad \{T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta\} : \{A^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta\} = (\lambda + \nu) : \mu$$

d. h.

$$(8) \qquad \cos^2\varphi = (\lambda + \nu) : \mu.$$

(**F**) Wir betrachten

$$(1) \qquad \cos^2\varphi = T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta,$$

und

$$(2) \qquad \cos^2\bar{\varphi} = \bar{T}^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta,$$

so folgt

$$(3) \qquad \begin{aligned}\cos^2\bar{\varphi} : \cos^2\varphi &= \{\bar{T}^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta\} : \{T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta\} \\ &= \{\bar{T}^{11} + 2\bar{T}^{12}t + \bar{T}^{22}t^2\} : \{T^{11} + 2T^{12}t + T^{22}t^2\}.\end{aligned}$$

Berechnet man

$$(4) \qquad d/dt\,\{\cos^2\bar{\varphi} : \cos^2\varphi\} = 0,$$

so folgt

$$(5)\qquad (\overline{T}^{12} + \overline{T}^{22}t)(T^{11} + 2T^{12}t + T^{22}t^2) \\ - (T^{12} + T^{22}t)(\overline{T}^{11} + 2\overline{T}^{22}t + \overline{T}^{22}t^2) = 0,$$

oder

$$(6)\qquad (T^{12}\overline{T}^{22} - T^{22}\overline{T}^{12})t^2 + (T^{11}\overline{T}^{22} - T^{22}\overline{T}^{11})t \\ + (T^{11}\overline{T}^{12} - T^{12}\overline{T}^{11}) = 0.$$

Ohne der Allgemeinheit zu schaden, kann man annehmen: $T^{11} \neq 0$, so dasz die Diskriminante $= (T^{11}\overline{T}^{22} - T^{22}\overline{T}^{11})^2 - 4(T^{12}\overline{T}^{22} - \overline{T}^{12}T^{22}) \times (T^{11}\overline{T}^{12} - T^{12}\overline{T}^{11}) = 4\,T\,(T^{11})^{-2}(T^{11}\overline{T}^{12} - T^{12}\overline{T}^{11})^2 + [T^{11}\overline{T}^{22} - \overline{T}^{22}T^{11} - 2T^{12} \times (T^{11}\overline{T}^{12} - T^{12}\overline{T}^{11})(T^{11})^{-1}]^2 > 0$, wenn $T^{\alpha\beta}$, $\overline{T}^{\alpha\beta}$ und $\rho_\alpha$ reell sind.

Deshalb gibt es im allgemeinen zwei verschiedene reelle Wurzeln.

(**G**) Aus

$$(1)'\qquad \cos^2\varphi = T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta$$

folgt

$$(2)\qquad \tan\varphi = \pm\sqrt{1-\cos\varphi} : \sqrt{1+\cos\varphi} \\ = \pm\sqrt{1-\sqrt{T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta}} : \sqrt{1+\sqrt{T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta}},$$

so kann man

$$(3)\qquad \frac{\tan\varphi_1/2 - \tan\varphi_3/2}{\tan\varphi_2/2 - \tan\varphi_3/2} : \frac{\tan\varphi_1/2 - \tan\varphi_4/2}{\tan\varphi_2/2 - \tan\varphi_4/2}$$

berechnen.(1)

## ( 4 )

Die folgenden Zeilen bilden eine Fortsetzung der in dieser Zeitschrift erschienenen Arbeit(2) „Kugelgeometrie von MÖBIUS," deren Kenntnis daher vorausgesetzt wird.

(**A**) Die Minimallinien auf der Kreisfläche sind

(1) Vgl. TAKASU, T.: Differenfialgeo. in den Kugelrämen, Bd. 1, Tokyo, (1938), S. 398.

(2) NAKAZIMA (=MATUMURA), S.: Kugelgeometrie von Möbius, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. 2 (1929), p. 36.

$$(1) \qquad (\theta_t\theta_t)\,dt^2 + 2\,(\theta_t\theta_\tau)\,dt d\tau + (\theta_\tau\theta_\tau)\,d\tau^2 = 0\,,$$

wo $D^2=(\theta_t\theta_\tau)^2-(\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau)$ nicht identisch verschwindet.

(1) bildet ein Netz von unendlich kleinen Parallelogrammen in der $t\tau$ -Ebene.

Mittels zweier Parameter $u$, $v$ kann jedes vollkommene Parallelogramm-Netz in der Form

$$(2) \qquad t = U_1(u) + V_1(v), \quad \tau = U_2(u) + V_2(v)$$

dargestellt werden, wo $U_1$, $U_2$ nur von $u$ und $V_1$, $V_2$ nur von $v$ abhängen und die Funktionaldeterminate[3]

$$(3) \qquad U_1'V_2' - U_2'V_1'$$

nicht identisch verschwindet.

Indem man von den beiden Kurven

$$(4) \qquad \mathfrak{x}_1 = 2U_1(u),\ A_1 = 2U(u) \text{ und } \mathfrak{x}_2 = 2V_1(v),\ A_2 = 2V_2(v)$$

ausgeht, kann man alle Kurven des Netzes dadurch erzeugen, dasz man von allen Strecken, die von irgendeinem Punkte der einen Kurve nach allen Punkten der andern gehen, die Mitten bestimmt.

Aus (1) folgt

$$(5) \qquad \frac{d\tau}{dt} = \frac{-(\theta_t\theta_\tau) \pm D}{(\theta_\tau\theta_\tau)}\,,$$

wenn D einer der beiden durch $D^2 = (\theta_t\theta_\tau)^2 - (\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau)$ definierten Funktionswerte ist.

Die Integralkurven der Differentialgleichung (1) bilden ein vollkommenes Parallelogramm-Netz, wenn solche Punkte der Integralkurven einer der beiden Gleichungen (5), denen dieselbe Tangentenrichtung zukommt, eine Intergalkurve der andern Gleichung (5) ausmachen, d. h. wenn

$$(6) \qquad \frac{-(\theta_t\theta_\tau) \mp D}{(\theta_\tau\theta_\tau)} = \text{konst.}$$

---

(3) **SCHEFFERS, G.: Eigenschaften der Integralflächen der partiellen Differentialgleichung $s^2-rt$=konst., Math. Z. 5 (1919), S. 112.**

die Inregrale von (5) sind

Da sich die letzte Gleichung auch in der Form

$$(7) \qquad \frac{-(\theta_t\theta_\tau) \pm \mathrm{D}}{(\theta_t\theta_t)} = \text{konst.}$$

schreiben läszt, dasz die hieraus durch Differentiation hervorgehende Gleichung durch das Einsetzen des Wertes (5) von $d\tau : dt$ befriedigt werde.

Daraus ergeben sich die Bedingungen

$$(8) \qquad \begin{cases} -(\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau)(\theta_t\theta_\tau)_t + (\theta_t\theta_\tau)(\theta_\tau\theta_\tau)(\theta_t\theta_t)_t + (\theta_t\theta_t)(\theta_t\theta_\tau)(\theta_t\theta_\tau)_\tau \\ -(\theta_t\theta_\tau)^2(\theta_t\theta_t)_\tau + (\theta_t\theta_t)\mathrm{DD}_\tau - \mathrm{D}^2(\theta_t\theta_t)_\tau = 0, \\ (\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau)\mathrm{D}_t - (\theta_\tau\theta_\tau)\mathrm{D}(\theta_t\theta_t)_t - (\theta_t\theta_t)(\theta_t\theta_\tau)\mathrm{D}_\tau + (\theta_t\theta_\tau)\mathrm{D}(\theta_t\theta_t)_\tau \\ -(\theta_t\theta_t)\mathrm{D}(\theta_t\theta_\tau)_\tau + (\theta_t\theta_\tau)\mathrm{D}(\theta_t\theta_t)_\tau = 0. \end{cases}$$

(8) gehen in die Bedingungen über:

$$(9) \qquad \begin{cases} (\theta_\tau\theta_\tau)(\theta_t\theta_t)_t - (\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau)_t = 2\{(\theta_t\theta_\tau)(\theta_t\theta_t)_\tau - (\theta_t\theta_t)(\theta_t\theta_\tau)_\tau\}, \\ (\theta_\tau\theta_\tau)(\theta_t\theta_t)_\tau - (\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau)_\tau = -2\{(\theta_t\theta_\tau)(\theta_\tau\theta_\tau)_t - (\theta_\tau\theta_\tau)(\theta_t\theta_\tau)_t\}. \end{cases}$$

Dies sind also die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dasz die (1), in der $(\theta_t\theta_\tau)^2 - (\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau) \neq 0$ ist, ein vollkommenes Parallelogramm-Netz in der $t\tau$ -Ebene definiere.

Weiter kann man SCHEFFERS Arbeit[3] auf meine Arbeit[2] anwenden.

(**B**) Wir betrachten

$$(1) \qquad ds^2 = \{(\theta_t\theta_t)\,dt^2 + 2(\theta_t\theta_\tau)\,dtd\tau + (\theta_\tau\theta_\tau)\,d\tau^2\} : \lambda^{-1}.$$

Wenn (1) ein Radialnetz ist, so folgt[4]

$$(2) \qquad ds^2 = \tau^2 dt^2 + 2(\theta_t\theta_\tau)\,dtd\tau + d\tau^2.$$

Nehmen wir an, dasz zwei Minimallinien

$$(3) \qquad \tau_1^2 dt^2 + 2(\theta_t\theta_\tau)_1\,dtd\tau + d\tau^2 = 0$$

und

(4) VOSS, A.: Abbildung krümmer Flächen, Mathemat. Annalen 19 (1981-82), S. 22.

$$(4) \qquad \tau_2^2\, dt^2 + 2\,(\theta_t\theta_\tau)_2\, dt d\tau + d\tau^2 = 0$$

auf zwei Kreisflächen $F_1$ bzw. $F_2$ liegen.

Die Abbildung ist flächentreu, wenn die das Linienelement auf beiden Kreisflächen darstellenden quadratischen Formen

$$ds_1^2 = \tau_1^2\, dt^2 + 2\,(\theta_t\theta_\tau)_1\, dt d\tau + d\tau^2,$$

$$ds_2^2 = \tau_2^2\, dt^2 + 2\,(\theta_t\theta_\tau)_2\, dt d\tau + d\tau^2$$

dieselbe Determinante besitzen, die dann, weil die beiden Formen definit sind, einen positiven Wert hat. Also ist

$$\tau_1^2 - (\theta_t\theta_\tau)_1^2 = \tau_2^2 - (\theta_t\theta_\tau)^2 = \triangle > 0\,.$$

Bei jeder Abbildung gibt es in jedem Punkte zwei sich zu zwei Kurvennetzen zusammenschlieszende Richtungen, in denen die Abbildung längentreu ist, also $ds_1^2 = ds_2^2$ ist.

Diese Richtungen ergeben sich aus den Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$S = ds_1^2 - ds_2^2 = (\tau_1^2 - \tau_2^2)\,dt^2 + 2\,\{(\theta_t\theta_\tau)_1 - (\theta_t\theta_\tau)_2\}\, dt d\tau = 0\,.$$

Weiter kann man LAGALLYS Arbeit(1) an meiner Arbeit(2) anwenden.

(C) Im folgenden mögen wir die Anwendung von der Kugelgeometrie auf die analytische Dynamik erklären.

Wir betrachten das Radialnetz(3) auf der Kreisfläche, so kann man setzen

$$(1) \qquad ds^2 = \tau^2 dt^2 + 2\,(\theta_t\theta_\tau)\, dt d\tau + d\tau^2,$$

wo $ds$ das Bogenelement ist.

Der Massenpunkt hat die kinetische Energie

$$(2) \qquad T = \tfrac{1}{2}\,\{\tau^2 \dot{t}^2 + 2\,(\theta_t\theta_\tau)\,\dot{t}\,\dot{\tau} + \dot{\tau}^2\}\,,$$

(1) LAGALLY, M.: Über die Zerlegbarkeit von flächentreu aufeinander abgebildeten Gebieten in unendlich kleine, paarweise kongruente Teile, Math. Z. (1920), S. 143.

(2) NAKAZIMA, S.: Kugelgeo. von MÖBIUS, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ. Vol. 2, S. 36.

(3) Vgl. (4) in (B).

und die LAGRANGEschen Bewegungsgleichungen lauten:

$$(3) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{t}}\right) - \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial t}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\tau}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \tau} = -\frac{\partial V}{\partial \tau}.$$

Sie können auf die Form gebracht werden:

$$(4) \qquad \{\tau^2 - (\theta_t\theta_\tau)^2\}\, \ddot{t} = -\frac{\partial V}{\partial t} + (\theta_t\theta_\tau)\frac{\partial V}{\partial \tau}$$
$$+ \dot{t}^2\left\{(\theta_t\theta_\tau)\frac{\partial(\theta_t\theta_\tau)}{\partial t} - (\theta_t\theta_\tau)\tau\right\}$$
$$- 2\dot{t}\dot{\tau}\tau(\theta_t\theta_\tau) - \dot{\tau}^2\frac{\partial(\theta_t\theta_\tau)}{\partial \tau},$$

u. s. w.,

wo $\bar{t}$ $t$ in WHITTAKERS Buch bedeutet.

Weiter kann man untersuchen wie in SCHEFFERS Buch.(1)

(D) Im folgenden möchten wir eine Kugel als Kreisfläche betrachten.

Wenn $\xi(t, \tau)$ auf der Einheitkugel ein äquidistantes System ist, so kommt zustande

$$(1) \qquad (d\xi d) = dt^2 - 2\cos\varphi\, dt d\tau + d\tau^2.$$

Also sind die Minimallinien mit

$$(2) \qquad dt^2 - 2\cos\varphi\, dt d\tau + d\tau^2 = 0$$

gegeben.

In dem Falle gilt

$$(\theta_t\theta_\tau) = -\cos\varphi$$

wo $(\theta_t\theta_\tau)$ in meiner führen Arbeit(2) steht.

(E) Sind $x$, $y$, $z$ die Koordinaten auf der Kreisfläche, so hat die Tangente der Parameterlinie $(\tau)$ den Richtungskosinus (3)

(1) WHITTAKER, E. T.: Analytische Dynamik der Punkte und Starrenkörper, Berlin (1924), S. 433.

(2) NAKAZIMA (=MATUMURA), S.: Kugelgeo. von MÖBIUS, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. 2, S. 36.

(3) SCHEFFERS, G.: Theorie ker Flächen, Berlin und Leipzig (1922), S. 34.

$$(1)\qquad \frac{x_t}{\sqrt{(\theta_t\theta_t)}},\quad \frac{y_t}{\sqrt{(\theta_t\theta_t)}},\quad \frac{z_t}{\sqrt{(\theta_t\theta_t)}},$$

während die Tangente der Parameterline $(t)$ den Richtungskosinus hat:

$$(2)\qquad \frac{x_\tau}{\sqrt{(\theta_\tau\theta_\tau)}},\quad \frac{y_\tau}{\sqrt{(\theta_\tau\theta_\tau)}},\quad \frac{z_\tau}{\sqrt{(\theta_\tau\theta_\tau)}}.$$

Weiter erhält die Gleichung (12) in SCHEFFERS Buch die Form [1]:

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{x_t}{\sqrt{(\theta_t\theta_t)}} & \dfrac{y_t}{\sqrt{(\theta_t\theta_t)}} & \dfrac{z_t}{\sqrt{(\theta_t\theta_t)}} \\ \dfrac{x_\tau}{\sqrt{(\theta_\tau\theta_\tau)}} & \dfrac{y_\tau}{\sqrt{(\theta_\tau\theta_\tau)}} & \dfrac{z_\tau}{\sqrt{(\theta_\tau\theta_\tau)}} \\ \dfrac{y_t z_\tau - z_t y_\tau}{\sqrt{(\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau)-(\theta_t\theta_\tau)^2}} & \dfrac{z_t x_\tau - x_t z_\tau}{\sqrt{(\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau)-(\theta_t\theta_\tau)^2}} & \dfrac{z_t y_\tau - y_t x_\tau}{\sqrt{(\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau)-(\theta_t\theta_\tau)^2}} \end{vmatrix}.$$

Die Gleichung der Asymptotenlinien auf der Kreisfläche ist

$$(4)\qquad \mathrm{L}\,dt^2 + 2\,\mathrm{M}\,dt\,d\tau + \mathrm{N}\,d\tau^2 = 0,$$

wo

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathrm{L} = \dfrac{(\mathfrak{x}_{tt}\,\mathfrak{x}_t\,\mathfrak{x}_\tau)}{\sqrt{(\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau)-(\theta_t\theta_\tau)^2}}, \\ \mathrm{M} = \dfrac{(\mathfrak{x}_{\tau\tau}\,\mathfrak{x}_t\,\mathfrak{x}_\tau)}{\sqrt{(\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau)-(\theta_t\theta_\tau)^2}}, \\ \mathrm{N} = \dfrac{(\mathfrak{x}_{\tau\tau}\,\mathfrak{x}_t\,\mathfrak{x}_\tau)}{\sqrt{(\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau)-(\theta_t\theta_\tau)^2}} \end{cases}$$

gilt.[2]

Der Nabelpunkt (d. i. der reguläre Punkt einer Kreisfläche, in dem

$$\frac{\mathrm{L}}{(\theta_t\theta_t)} = \frac{\mathrm{M}}{(\theta_t\theta_\tau)} = \frac{\mathrm{N}}{(\theta_\tau\theta_\tau)} = \frac{1}{\rho}\Big)$$

(1) SCHEFFERS, a. a. O., S. 35.

(2) BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie 1 (1930), S. 99.

heiszt nach DOWNS[1] der zirkulare Punkt, wenn $1/\rho \neq 0$, und der planare Punkt, wenn $1/\rho = 0$ ist.

(**F**) Man kann den folgenden Satz beweisen.

**Satz :** *Das von unendlich benachbarten Parameterlinien* $(\tau)$, $(\tau+\varepsilon)$, $(\tau+2\varepsilon)$, ... *und* $(t)$, $(t+\varepsilon)$, $(t+2\varepsilon)$, ... *für lim* $\varepsilon=0$ *gebildete Netz auf einer Kreisfläche hat dann und nur dann lauter gleich grosze Parallelogramme, wenn die Gröszen*

$$(\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau) - (\theta_t\theta_\tau)^2$$

*und*

$$\frac{(\theta_t\theta_t)\,dt^2 + 2(\theta_t\theta_\tau)\,dt d\tau + (\theta_\tau\theta_\tau)\,d\tau^2)}{ds^2}$$

*konstant sind. Dabei wird vorausgesetzt, dasz die Parameterlinien keine Minimallinien seien, wo ds die Bogenlänge sei.*[2]

(**G**) Wir betrachten die Kreisfläche einer konstanten mittleren Krümmung.

Es ist also für diese Kreisfläche[3]

$$(1) \qquad 1/R_1 + 1/R_2 = h = \text{const.}.$$

Aus (1) folgt

$$(2) \qquad U/(\theta_t\theta_t) + V/(\theta_\tau\theta_\tau) = 0\,,$$

oder, wenn $\lambda$ einen Proportionalitätsfaktor bedeutet,

$$(3) \qquad (\theta_t\theta_t) = \lambda U\,, \quad (\theta_\tau\theta_\tau) = -\lambda V,$$

wo U eine Funktion von $u$ allein, V eine solche von $v$ allein bedeutet.

Das Linienelement der Kreisfläche lautet also:

$$ds^2 = \lambda\,(dt^2 + d\tau^2)\,.$$

(**H**) Wir betrachten die Kurvenscharen auf der Kreisfläche.

---

(1) DOWNS, T. L.: Asymptotic lines trough a planar point of a surface and lines of curvature through an umbilic, Duke math. J. 2, 415–422.

(2) SCHEFFERS, G.: Theorie der Flächen, S. 46.

(3) KOMMERELL: Theorie der Raumkurven und krummen Flächen, II, Berlin un Leipzig (1931), S. 21.

Wenn die zu zwei Werten $d\tau : dt$ und $\delta\tau : \delta t$ gehörigen Fortschreitungsrichtungen vom Punkte $(t, \tau)$ der Kreisfläche aus miteinander einen Winkel bilden, so ist[1]

$$(1)\qquad \cos\alpha =$$

$$\frac{(\theta_t\theta_t)\,dt\delta t + (\theta_t\theta_\tau)\,\{dt\delta\tau + d\tau\delta t\} + (\theta_\tau\theta_\tau)\,d\tau\delta\tau}{\sqrt{(\theta_t\theta_t)\,\delta t^2 + 2\,(\theta_t\theta_\tau)\,\delta t\delta\tau + (\theta_\tau\theta_\tau)\,\delta\tau^2}\,\sqrt{(\theta_t\theta_t)\,dt^2 + 2\,(\theta_t\theta_\tau)\,dtd\tau + (\theta_\tau\theta_\tau)\,d\tau^2}}$$

Wenn $\alpha = \pi/2$, so

$$(2)\qquad (\theta_t\theta_t)\,dt\delta t + (\theta_t\theta_\tau)\,\{dt\delta\tau + d\tau\delta t\} + (\theta_\tau\theta_\tau)\,d\tau\delta\tau = 0,$$

d. h.

$$(3)\qquad \left\{(\theta_t\theta_t)\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} - (\theta_t\theta_\tau)\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\}\delta t + \left\{(\theta_t\theta_\tau)\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} - (\theta_\tau\theta_\tau)\frac{\partial\tau}{\partial t}\right\}\delta\tau = 0.$$

Ersetzt man sie unter der Einflührung eines Proportionalitätsfaktors durch

$$(4)\qquad \begin{cases} \delta t = \nu\left\{(\theta_\tau\theta_\tau)\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} - (\theta_t\theta_\tau)\dfrac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right\}, \\[2ex] \delta\tau = \nu\left\{(\theta_t\theta_t)\dfrac{\partial\varphi}{\partial\tau} - (\theta_t\theta_\tau)\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right\}, \end{cases}$$

so findet man

$$\delta\varphi = \nu\left[\left\{(\theta_\tau\theta_\tau)\frac{\partial\varphi}{\partial t} - (\theta_t\theta_\tau)\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right\}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right.$$
$$\left. + \left\{(\theta_t\theta_t\,\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} - (\theta_t\theta_\tau)\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right]$$

wo

$$\varphi(t, \tau) = \text{const.}$$

ist.[2]

(I) Weiter kann man klar machen den folgenden[3]

---

(1) SCHEFFERS, G.: Theorie der Flächen, S. 107.

(2) KNOBLAUCH, J.: Grundlagen der Differentialgeometrie, Berlin und Leipzig (1913), S. 130.

(3) Vgl. SCHEFFERS a. a. O., S. 79.

**Satz:** *Liegt eine Kreisfläche mit dem Bogenelement-Quadrat*

$$ds^2 = 1/\lambda \, \{(\theta_t\theta_t)\, dt^2 + 2\,(\theta_t\theta_\tau)\, dt d\tau + (\theta_\tau\theta_\tau)\, d\tau^2\}$$

*vor, so findet man ein thermisches Parameterpaar $\bar{t}$ und $\bar{\tau}$, indem man Integrele $t$ und $\tau$ der beiden in der Gleichung*

$$(\theta_t\theta_t)\, dt^2 + 2\,(\theta_t\theta_\tau)\, dt d\tau + (\theta_\tau\theta_\tau)\, d\tau^2 = 0$$

*enthaltenen Differentialgleichungen der Minimalkurven bestimmt und dann*

$$\bar{t} = \tfrac{1}{2}(t+\tau), \quad \bar{\tau} = -\tfrac{1}{2}\, i\,(t-\tau)$$

*setzt.*

(**J**) Man kann den folgenden Satz beweisen.

**Satz:** *Haben zwei Kreisflächen*

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}\,(t, \tau)$$

*und*

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{y}\,(\bar{t}, \bar{\tau})$$

*mit den Parametern $t$, $\tau$ bzw. $\bar{t}$, $\bar{\tau}$ einenPunkt gemein, so berühren sie einander dort in mindestens $n^{\text{ter}}$ Ordnung, wenn es eine Substitution*

$$\begin{aligned}
\Delta\bar{t} &= \lambda_{10}\Delta + \lambda_{01}\Delta\tau + 1/2!\,(\lambda_{20}\Delta t^2 + 2\lambda_{11}\Delta t\Delta\tau + \lambda_{02}\Delta\tau^2) \\
&\quad + \dots + 1/(n+1)!\,(\lambda_{n+1,0}\Delta t^{n+1} + \dots + \lambda_{0,n+1}\Delta\tau^{n+1}), \\
\Delta\bar{\tau} &= \mu_{10}\Delta t + \mu_{01}\Delta\tau + 1/2!\,(\mu_{20}\Delta t^2 + 2\mu_{11}\Delta t\Delta\tau + \mu_{02}\Delta\tau^2) \\
&\quad + \dots + 1/(n+1)!\,(\mu_{n+1,0}\,\Delta^{n+1} + \dots + \mu_{0,n+1}\Delta\tau^{n+1}),
\end{aligned}$$

*worin $\lambda_{10}\mu_{01} - \mu_{10}\lambda_{01}$ von Null verschieden ist, derart gibt, dasz diejenigen Reihen nach Potenzen von $\Delta t$ und $\Delta\tau$, die aus der Entwicklung*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{x} - \mathfrak{y} &= (\mathfrak{x}_t^0\,\Delta t + t_\tau^0\,\Delta\tau) - (\mathfrak{y}_{\bar{t}}^0\Delta\bar{t} + \mathfrak{y}_{\bar{\tau}}^0\Delta\bar{\tau}) \\
&\quad + 1/2!\,[(\mathfrak{x}_{tt}^0\Delta t^2 + 2\,\mathfrak{x}_{t\tau}^0\Delta t\Delta\tau + \mathfrak{x}_{\tau\tau}^0\Delta\tau^2) \\
&\quad - (\mathfrak{y}_{\bar{t}\bar{t}}^0\Delta\bar{t} + 2\,\mathfrak{y}_{\bar{t}\bar{\tau}}^0\Delta\bar{t}\Delta\bar{\tau} + \mathfrak{y}_{\bar{\tau}\bar{\tau}}^0\Delta\bar{\tau}^2)] + \dots
\end{aligned}$$

*durch jene Substitution hervorgehen, frei von den Gliedern erster bis $n^{\text{ter}}$ Dimension in $\Delta t$ und $\Delta\tau$ werden.*

*Dabei deutet der Index Null überall an, dasz die Ableitungen* $\mathfrak{x}_t$, $\mathfrak{x}_\tau$, $\mathfrak{y}_{\bar{t}}$, $\mathfrak{y}_{\bar{\tau}}$ *usw. der Koordinaten* $\mathfrak{x}$ *bzw.* $\mathfrak{y}$ *nach den Parametern* $t$ *und* $\tau$ *bzw.* $\bar{t}$ *und* $\bar{\tau}$ *für den gemeinsamen Punkt beider Flächen zu bilden sind.*[1]

(**K**) Wir setzen[2]

$$L^{11} = (\theta_t\theta_t),\ L_{12} = (\theta_t\theta_\tau),\ L_{22} = (\theta_\tau\theta_\tau),\ t \equiv u^1,\ \tau \equiv u^2,$$

$L_{ik}$ sei $G_{ik}$[3] ähnlicher Tensor, d. h.,

$$L_{ik} = \lambda(u^1, u^2)\, G_{ik}\,.$$

Wann schneiden sich die Kurven der Scharen

$$P_i\, du^i = 0\,,\quad Q_k\, \partial u^k = 0$$

der Kreisfläche $(x)$ im Sinne der durch $L_{ik}$ bestimmten Metrik allenthalben orthogonal?

Die Gleichung

$$P_i\, \dot{u}^i = 0$$

bestimmt im Punkt $x$ der Kreisfläche ein Paar orthogonaler Vektoren $P_1$ und $\dot{u}^i$.

Soll auch $Q_k$ ein zu $P_i$ senkrechter Vektor sein, so muss er zu $\dot{u}^i$ parallel sein; es ist aber

$$Q^i = L^{ik}Q_k\,;$$

da aber

$$\dot{u}_i = \mu(u^1, u^2)\, Q^i$$

sein musz, so erfolgt, dasz die gesuchte Bedingung

$$L^{ik}P_iQ_k = 0$$

ist.

---

(1) SCHEFFERS, G.: Theorie der Flächen, S. 173.
(2) NAKAZIMA, S.: Kugelgeo. von MÖBIUS, Mem. of Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. 2, S. 36.
(3) BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeo. II (1923), S. 152.

(**L**) Ist $\varphi$ der Winkel, den eine beliebige Fortschreitungsrichtung $dt:d\tau$ mit der Krümmungslinie

$$(1) \qquad \tau = \text{const.}$$

einschlieszt, so ist, da $(\theta_t\theta_\tau) = 0$ ist,

$$(2) \qquad \tan\varphi = \sqrt{(\theta_\tau\theta_\tau)}\, d\tau : \sqrt{(\theta_t\theta_t)}\, dt$$

oder, wenn $\lambda$ einen Proportionalitätsfaktor bedeutet,[1]

$$(3) \qquad \begin{cases} dt = \lambda\sqrt{(\theta_\tau\theta_\tau)}\cos\varphi\,, \\ d\tau = \lambda\sqrt{(\theta_t\theta_t)}\sin\varphi\,. \end{cases}$$

(**M**) Wir betrachten des Paraboloid[2]

$$(1) \quad 2z = a(x^2 + y^2)$$

als Schiebungsfläche, so kann man setzen

$$(2) \qquad \begin{cases} (\theta_t\theta_t) = (1/t + a^2):(1/\tau + a^2), \\ (\theta_t\theta_\tau) = a^2:(1/\tau + a^2), \\ (\theta_\tau\theta_\tau) = 1, \end{cases}$$

wenn wir es als Kreisfläche ansehen.

Denn es gilt:

$$(3) \qquad \frac{(1/t + a^2)}{(\theta_t\theta_t)} = \frac{a^2}{(\theta_t\theta_\tau)} = \frac{1/\tau + a^2}{(\theta_\tau\theta_\tau)}\,, \quad (\theta_\tau\theta_\tau) = 1\,.$$

In unserm Falle sind die Gleichungen von Minimallinien

$$(4) \qquad (1/t + a^2)\,dt^2 + 2\,a^2 dt d\tau + (1/\tau + a^2)\,d\tau^2 = 0\,.$$

(**N**) Wir betrachten die folgende Aufgabe:

*Gegeben sind zwei Kreisflächen* S, S'; *es ist zu untersuchen, ob sie aufeinander abwickelbar sind; und wenn dieses der Fall ist, sollen die darauf bezüglichen Gleichungen aufgestellt werden.*

Nun nehmen wir an, es seien

(1) KOMMERELL: Raumkurven und Flächen, II Band, S. 27.
(2) EISENHART, L. P.: A treatise on the differential geometry of curves and surfaces, p. 230.

$$(1)\qquad \begin{cases} \varphi(t,\tau)=\bar{\varphi}(t',\tau'),\\ \psi(t,\tau)=\psi'(t',\tau') \end{cases}$$

zwei unabhängige Beziehungen zwischen $t$, $\tau$ ; $t'$, $\tau'$, welche das Gesetz darstellen, nach dem unter der Voraussetzung der Abwickelbarkeit der Kreisflächen aufeinander die Punkte der einen Kreisfläche denen der anderen entsprechen.

Aus LUKATS Buch[1] folgt:

$$(\theta_t\theta_t)\,dt^2+2(\theta_t\theta_\tau)\,dtd\tau+(\theta_\tau\theta_\tau)\,d\tau^2$$
$$=\frac{\Delta_1\psi d\varphi^2-2\nabla(\varphi,\psi)\,d\varphi d\psi+\Delta_1\varphi d\psi^2}{\Delta_1\varphi\Delta_1\psi-\nabla^2(\varphi,\psi)},$$

$$(\theta_{t\prime}\theta_{t\prime})'\,dt'^2+2(\theta_{t\prime}\theta_{\tau\prime})'\,dt'd\tau'+(\theta_{\tau\prime}\theta_{\tau\prime})'\,d\tau'^2$$
$$=\frac{\Delta_1'\psi'd\varphi'^2-2\nabla'(\varphi',\psi')\,d\varphi'd\psi'+\Delta_1'\varphi'd\varphi'^2}{\Delta_1'\varphi'\Delta_1'\psi'-\Delta'^2(\varphi',\psi')},$$

wo

$$\Delta_1\varphi=\frac{(\theta_t\theta_t)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)^2-2(\theta_t\theta_\tau)\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}+(\theta_\tau\theta_\tau)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2}{(\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau)-(\theta_t\theta_\tau)^2},$$

$$\nabla(\varphi,\psi)=\frac{(\theta_t\theta_t)\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}-(\theta_t\theta_\tau)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}+\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)+(\theta_\tau\theta_\tau)\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t}}{(\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau)-(\theta_t\theta_\tau)^2},$$

$$\Delta_1'\varphi'=\frac{(\theta_{t\prime}\theta_{t\prime})\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial\tau'}\right)^2-2(\theta_{t\prime}\theta_{\tau\prime})'\frac{\partial\varphi'}{\partial t}\frac{\partial\varphi'}{\partial\tau'}+(\theta_{\tau\prime}\theta_{\tau\prime})\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial t'}\right)^2}{(\theta_{t\prime}\theta_{t\prime})(\theta_{\tau\prime}\theta_{\tau\prime})-(\theta_{t\prime}\theta_{\tau\prime})^2},$$

u. s. w..

(**O**) Auf einer Kreisfläche S nehmen wir zwei Kurven C und C′ an, die nicht geodätisch parallel sind, und wählen als Parameterlinien $t$, $\tau$ die geodätischen Parallelen C und C′, als Parameter $t$ die geodätische Entfernung von der Grundkurve C und als Parameter $\tau$ diejenige von der Grundkurve C′.

(1) LUKAT, M.: BIANCHIS Vorlesungen über Differentialgeo. S. 182.

Aus den Formeln in LUKATS Buch(1) ergibt sich

$$(1) \qquad \frac{\lambda}{(\theta_t\theta_t) - (\theta_t\theta_\tau)^2} = 1,$$

$$(2) \qquad \frac{(\theta_t\theta_t)\,\lambda}{(\theta_t\theta_t) - (\theta_t\theta_\tau)^2} = 1,$$

d. h.

$$(3) \qquad (\theta_t\theta_t) = 1,$$

$$(4) \qquad (\theta_t\theta_\tau) = 0,$$

wobei $\lambda$ in meiner Arbeit(2) steht.

Also ist die Gleichung der Minimallinien

$$(5) \qquad dt^2 + d\tau^2 = 0$$

und gilt

$$(6) \qquad ds^2 = dt^2 + d\tau^2,$$

wo $ds$ die Bogenlänge bedeutet.

Führen wir nun als neue Parameterlinien die Kurven:

$$(7) \qquad t + \tau = \text{const.}, \quad t - \tau = \text{const.}$$

ein und setzen noch:

$$(8) \qquad t + \tau = 2\alpha, \quad t - \tau = 2\beta,$$

so erhalten wir:

$$(9) \qquad \begin{cases} ds^2 = 2\,\{d\alpha^2 + d\beta^2\}, \\ \cos w = 0, \\ \sin w = 1, \\ w = \sin^{-1}\{\sqrt{(\theta_t\theta_t) - (\theta_t\theta_\tau)^2}\}. \end{cases}$$

(P) Wählt man als Flächenparameter $u$ und $v$ speziell die

(1) LUKAT, M.: BIANCHIS Vorlesungen über Differentialgeometrie (1910), S. 162.

(2) NAKAZIMA, S.: Kugelgeometrie von MÖBIUS, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. 2, S. 36.

Polarkoordinaten $r$ und $v$ der $xy$ -Ebene, so erhält die Gleichung der gegebenen Fläche die Form

$$(1) \qquad x = r\cos v, \quad y = r\sin v, \quad z = Z(r, v),$$

so folgt[1]

$$(2) \qquad E = 1 + z_r^2, \quad F = z_r z_v, \quad G = r^2 + z_v^2,$$

wo E, F, G die Fundamentalgröszen erster Ordnung sind.

Also gilt für die Kreisfläche

$$(3) \qquad \begin{cases} \lambda^{-1}(\theta_r\theta_r) = 1 + z_r^2, \\ \lambda^{-1}(\theta_r\theta_v) = z_r z_v, \\ \lambda^{-1}(\theta_v\theta_v) = r^2 + z_v^2, \end{cases}$$

wo $(\theta_r\theta_r)$, $(\theta_r\theta_v)$, $(\theta_v\theta_v)$ unsere Fundamentalgröszen sind.

(Q) Wir betrachten zwei Kreisflächen K und $\overline{\text{K}}$, und zwei Minimallinien

$$(1) \qquad (\theta_t\theta_t)\,dt^2 + 2(\theta_t\theta_\tau)\,dtd\tau + (\theta_\tau\theta_\tau)\,d\tau^2 = 0$$

und

$$(2) \qquad \overline{(\theta_t\theta_t)}\,dt^2 + 2\overline{(\theta_t\theta_\tau)}\,dtd\tau + \overline{(\theta_\tau\theta_\tau)}\,d\tau^2 = 0,$$

die auf K bzw. $\overline{\text{K}}$ liegen.

Setzen wir

$$(3) \qquad \frac{1}{P} = \frac{(\theta_t\theta_t) + 2(\theta_t\theta_\tau)\sigma + (\theta_\tau\theta_\tau)\sigma^2}{\overline{(\theta_t\theta_t)} + 2\overline{(\theta_t\theta_t)}\sigma + \overline{(\theta_\tau\theta_\tau)}\sigma^2},$$

wo $\sigma = d\tau : dt$ ist.

Berechnet man

$$(4) \qquad d/d\sigma\,(1/P) = 0,$$

so folgt

$$(5) \qquad \{(\theta_t\theta_\tau) + (\theta_\tau\theta_\tau)\,\alpha\}\,\{\overline{(\theta_t\theta_t)} + 2\overline{(\theta_t\theta_\tau)}\,\sigma + \overline{(\theta_\tau\theta_\tau)}\,\sigma^2\}$$
$$- \{\overline{(\theta_t\theta_\tau)} + \overline{(\theta_\tau\theta_\tau)}\,\sigma\}\,\{(\theta_t\theta_t) + 2(\theta_t\theta_\tau)\sigma + (\theta_\tau\theta_\tau)\,\sigma^2\} = 0$$

---

(1) FISCHER, H. L: Der Verlauf von Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines vorgegebenen Punktes, Deutsche Mathematik, Zweites Heft (1938), S. 173.

oder

$$(6) \qquad \{(\overline{\theta_t\theta_\tau})(\theta_\tau\theta_\tau) - (\overline{\theta_\tau\theta_\tau})(\theta_t\theta_\tau)\}\,\sigma^2 + \{(\overline{\theta_t\theta_t})(\theta_\tau\theta_\tau) - (\overline{\theta_\tau\theta_\tau})(\theta_t\theta_t)\}\,\sigma + \{(\overline{\theta_t\theta_t})(\theta_t\theta_\tau) - (\overline{\theta_t\theta_\tau})(\theta_t\theta_t)\} = 0\,.$$

Unbeschadet der Allgemeinheit kann man $(\overline{\theta_t\theta_t}) \neq 0$ annehmen, so dasz die Diskriminante $= \{(\overline{\theta_t\theta_t})(\theta_\tau\theta_\tau) - (\overline{\theta_\tau\theta_\tau})(\theta_t\theta_t)\}^2 - 4\,\{(\overline{\theta_t\theta_\tau})(\theta_\tau\theta_\tau) - (\theta_t\theta_\tau)(\overline{\theta_\tau\theta_\tau})\}\ \{(\overline{\theta_t\theta_t})(\theta_t\theta_\tau) - (\overline{\theta_t\theta_\tau})(\theta_t\theta_t)\} = 4\,\mathrm{D}\,\{(\overline{\theta_t\theta_t})\}^{-2}\,\{(\overline{\theta_t\theta_t})(\theta_t\theta_\tau) - (\overline{\theta_t\theta_\tau})(\theta_t\theta_t)\}^2 + [(\overline{\theta_t\theta_t})(\theta_\tau\,\theta_\tau) - (\overline{\theta_\tau\,\theta_\tau})(\theta_t\,\theta_t) - 2\,(\overline{\theta_t\,\theta_\tau})\,\{(\overline{\theta_t\,\theta_t})(\theta_t\,\theta_\tau) - (\overline{\theta_t\theta_\tau})(\theta_t\theta_t)\}\,(\overline{\theta_t\theta_t})^{-1}]^2 > 0$, $\quad \mathrm{D}^2 = (\overline{\theta_t\theta_t})(\overline{\theta_\tau\theta_\tau}) - (\overline{\theta_t\theta_\tau})^2$, wenn die Fläche und das Parameter reell sind.

Deshalb gibt es im allgemeinen zwei verschiedene reelle Wurzeln.[1]

Ist eine Kreisfläche konstanter negativer Krümmung auf ihre Haupttangentenkurven bezogen, so wird das Längenelement durch den Ausduruck

$$(1) \qquad ds^2 = dt^2 + 2\cos z\,(t,\tau)\cdot dt d\tau + d\tau^2$$

gegeben,[2] wo

$$(2) \qquad (\theta_t\theta_t) = 1\,,\ (\theta_t\theta_\tau) = \cos z\,,\ (\theta_\tau\theta_\tau) = 1\,,\ \lambda = 1\,.$$

Die Gleichung von den Minimallinien ist

$$(3) \qquad dt^2 + 2\cos z\,dt d\tau + d\tau^2 = 0\,.$$

Mittels der bekannten Gleichungen

$$(4) \qquad \cos \Omega = \cos z\,,\quad \sin \Omega = \sin z$$

führen wir den Winkel $\Omega$ zwischen den Parameterlinien $t$, $\tau$ ein.

Indem wir nämlich die erste dieser Gleichungen nach $\tau$ differenzieren und für $\sin \Omega$ den durch die Gleichung gegebenen Wert einsetzen, erhalten wir

$$(5) \qquad -\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} = \frac{1}{\sin z}\cdot\frac{\partial \cos z}{\partial \tau}.$$

---

(1) TAKASU, T.: Differentialgeometrie in dem Kugelräumen, Bd. I (1938), Tokyo, S. 214.

(2) VOSS, A.: Über ein neues Frinzlp der Abbildung krummer Ober-Flächen, Math. Annalen, Bd. 19, S. 1.

Weiter kann man die Formeln in TAKASUS Buch[1] in Betracht nehmen.

## ( 5 )

Die folgenden Zeilen bilden eine Fortsetzung der in Tôhoku Math. Journ. erschienenen Arbeit[2] „*Differentialgeo. der Kreischaren*, X, XI, XII" § 3, deren Kenntnis daher vorausgesetzt wird.

Wir betrachten

$$(1)\qquad \cos\theta = \frac{G_{ij}\,du^i\,du^j}{\sqrt{g_{ij}du^i du^j\cdot \bar{g}_{ij}du^i du^j}} = \frac{G_{ij}\,du^i\,du^j}{D_{ij}\,du^i\,du^j},$$

wo

$$(2)\qquad g_{ij}\,du^i\,du^j\cdot \bar{g}_{ij}\,du^i du^j = (D_{ij}\,du^i\,du^j)^2 .$$

In unserem Falle gilt

$$(3)\qquad \begin{cases}\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2 = G/D,\\ \cos\theta_1+\cos\theta_2 = G^{\alpha\beta}D_{\alpha\beta},\end{cases}$$

wo $\theta_1$, $\theta_2$ die Maximum-und Minimumwerte von $\theta$ sind.

---

(1) TAKASU, T.: Differentialgeo. in den Kugelräumen, I, Tokyo (1938), S. 267.

(2) NAKAZIMA, S.: Differentialgeo. der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math, Journ., 34 (1931), S. 191.

# BEITRÄGE ZUR GEOMETRIE DER KREISE UND KUGELN (XXVII)

Sôzi MATUMURA

(Accepted for publication, July, 18, 1938)

Im folgenden möchten wir einige Satze über die Kreise und Kugeln erwahnen.

## ( 1 )

(**A**) Wir betrachten

$$(1) \qquad \mathfrak{v} = \lambda \mathfrak{x} + \mu \mathfrak{y} + \nu \mathfrak{z},$$

wo $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Kugeln in $R_3$, $\lambda$, $\mu$, $\nu$ die Parameter sind.

$\mathfrak{v}$ bezeichnet die Kugel, die durch zwei Schnittpunkte von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ geht.

Aus (1) kann man wissen, dasz $\mathfrak{v}$ eine Kugel ist, die durch den Schnittkreis von $\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}$ und $\mathfrak{z}$ geht.

$\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ bezeichnet eine Kugel, die durch den Schnittkreis von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ geht.

$\mathfrak{v}$ ist auch eine Kugel, die durch den Schnittkreis $\{\mathfrak{y}, \mathfrak{z}\}$ und $\mathfrak{x}$ geht.

(**B**) Wenn $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ zwei Punkte, $\mathfrak{a}$ der Kreis in $R_2$ ist, so folgt aus

$$(1) \qquad \mathfrak{a} - \lambda \mathfrak{p} = \mu \mathfrak{q}$$

$$(2) \qquad 0 = \mu^2 (qq) = (\mathfrak{a}\mathfrak{a}) - 2\lambda (\mathfrak{a}\mathfrak{p}),$$

wo $\mathfrak{a}$ nicht anf $\mathfrak{p}$ liegt, woraus folgt

$$(3) \qquad \lambda = \frac{1}{2(\mathfrak{a}\mathfrak{p})};$$

[Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ. Formosa, Japan, Vol. XXI. No. 6, September, 1938.]

so erhalten wir aus (1)

$$(4)\qquad \mathfrak{a} = \frac{1}{2(\mathfrak{a}\mathfrak{p})}\,\mathfrak{p} + \mu q\,.$$

Wenn ein Kreis $\mathfrak{y}$ zu $\mathfrak{a}$ senkrecht ist, so folgt

$$(5)\qquad 0 = (\mathfrak{a}\mathfrak{y}) = \frac{1}{2(\mathfrak{a}\mathfrak{p})}(\mathfrak{p}\mathfrak{y}) + \mu(q\mathfrak{y}),$$

so ergibt sich

$$(6)\qquad \mu = -\frac{(\mathfrak{p}\mathfrak{y})}{2(q\mathfrak{y})(\mathfrak{a}\mathfrak{p})}\,.$$

Aus (4) ist endlich zu erhalten

$$(7)\qquad \mathfrak{a} = \{\mathfrak{p} : 2(\mathfrak{a}\mathfrak{p})\} + \{(\mathfrak{p}\mathfrak{y})\,q : 2(q\mathfrak{y})(\mathfrak{a}\mathfrak{p})\}\,.$$

(C)

$$(1)\qquad \varphi(\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}, \mathfrak{x}^{\mathrm{II}}) = C$$

bezeichnet die Kreisflache in $R_3$, wo $\mathfrak{x}^{a}$ $[a=\mathrm{I}, \mathrm{II}]$ die Kugeln in $R_3$, C eine Konstante bedeutet und $u^{i}$ die Parameter sind.

Aus (1) folgt

$$(2)\qquad \varphi_1 du^1 + \varphi_2 du^2 = 0\,,$$

wobei

$$(3)\qquad \varphi^{i} = \partial\varphi/\partial u^{i}$$

gesetzt is.

In der Tat erkennt man aus dem Ausdruck

$$(4)\qquad d(\varphi_i du^i) = \partial\varphi^i/\partial u_k \cdot du^i du_k + \varphi_i d^2u^k\,,$$

dasz das Grössensystem $\partial\varphi_i/\partial u^k$ nur dann einen Tensor bilden würde, wenn

$$(5)\qquad d^2u^i = \frac{\partial^2 u^i}{\partial \bar{u}^k \partial \bar{u}^l}\, d\bar{u}^k d\bar{u}^l = 0$$

ist.

Weiter betrachten wir

$$(6) \qquad \mathfrak{C} = \lambda \mathfrak{a} + \mathfrak{B},$$

wo $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Kreise, $\mathfrak{a}$ ein Punkt in $R_2$ ist.

Ist $\mathfrak{x}$ ein Kreis in $R_2$, so folgt aus (1)

$$(7) \qquad (\mathfrak{x}\mathfrak{C}) = \lambda(\mathfrak{a}\mathfrak{x}) + (\mathfrak{B}\mathfrak{x}),$$

d. h.

$$(8) \qquad (\mathfrak{x}\mathfrak{C}) = 1,$$

wenn sich $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{C}$ berühren und $\mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{x}$ liegt.

Aus (8) kann man wissen, dasz sich $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{C}$ berühren.

(**D**) Wir betrachten die durch $u^i = u^i(t)$ gegebene Kugelschar

$$(1) \qquad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^1(t), u^2(t))$$

des Kugelsystems.

Aus

$$(2) \qquad \dot{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x}_1 \dot{u}^1 + \mathfrak{x}_2 \dot{u}^2 \equiv \mathfrak{x}_i \dot{u}^i,$$

also

$$(3) \qquad \dot{\mathfrak{x}}\dot{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x}_i \mathfrak{x}_k \dot{u}^i \dot{u}^k = g_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k$$

ergibt sich

$$(4) \qquad g_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k = 0$$

mit

$$(5) \qquad g_{ik} = \mathfrak{x}_i \mathfrak{x}_k = -\mathfrak{x} \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u^i \partial u^k} = g_{ki}$$

als kennzeichnender Bedingung dafür, dasz die gegebene Kugelschar, bei der sich konsekutive Kugeln berühren.

Weiter gilt

$$(6) \qquad \mathfrak{x}[u^i(t+\varepsilon)] = \mathfrak{x} + \varepsilon \dot{\mathfrak{x}} + \frac{\varepsilon}{2} \ddot{\mathfrak{x}} + \dots = \mathfrak{x} + \varepsilon \mathfrak{x}_i \dot{u}^i$$
$$+ \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\mathfrak{x}_i \ddot{u}^i + \sum \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u^i \partial u^k} \dot{u}^i \dot{u}^k\right) + \dots,$$

wo $t$ ein Parameter, $\varepsilon$ eine kleine Änderung von $t$ ist.

(E) Im folgenden möchten wir THOMSENs Zeichen[1] benutzen.

Es sei $A_{11}$ ein beliebiger Ebenenpunkt, betrachtet als Schnitt zweier Kurven, als Einhullung von Kreisen und der Netzes.

Der Fortgang zu einem banachbarten Punkte auf einer dieser Linien werde, je nachdem er langs der ersten oder zweiten vollzogen wird, durch das Zeichen $d_1$ oder $d_2$ gekennzeichnet.

Es sei also

$$A_{11}A_{12} = d_1 t\,, \quad A_{11}A_{21} = d_2 t\,.$$

Nach der willkurlichen Annahme eines der beiden Punkte $A_{12}$ und $A_{21}$ kann der andere durch die Bedingung

$$d_1 t = d_2 t$$

bestimmt werden.

Das unendlichkleine Viereck $A_{11}A_{12}A_{22}A_{21}$, das von zwei Kurvenpaaren des Netzes begrenzt wird, ist dann mit beliebiger Genauigkeit als Quadrat zu betrachten.

Denn man hat

$$\begin{cases} A_{12}A_{22} = d_2 t + d_1 d_2 t\,, \\ A_{21}A_{22} = d_1 t + d_2 d_1 t\,. \end{cases}$$

Nun mögen ferner die Punkte $A_{13}$ und $A_{31}$ durch die Festsetzungen

$$A_{12}A_{13} = A_{12}A_{22}\,, \quad A_{21}A_{31} = A_{21}A_{22}$$

bestimmt sein. Da

$$\begin{cases} A_{12}A_{13} = d_1 t + d_1 d_1 t\,, \\ A_{21}A_{31} = d_2 t + d_2 d_2 t \end{cases}$$

ist, so folgen daraus die Beziehungen

$$\begin{cases} d_1 d_1 t = d_1 d_2 t\,, \\ d_2 d_2 t = d_2 d_1 t\,. \end{cases}$$

---

(1) THOMSEN, G.: Über konforme Geo II, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ., Bd IV, S. 117.

Wird durch $A_{13}$ die zweite, durch $A_{31}$ die erste Kurve des Netzes gezogen, so erscheinen auch die beiden unendlichkleinen Vierecke $A_{12}A_{13}A_{23}A_{22}$ und $A_{21}A_{22}A_{32}A_{31}$ als Quadrate.

Das vierte in $A_{22}A_{23}A_{33}A_{32}$ ist jetzt völlig bestimmt.

Soll es ein Quadrat sein, so musz die Bedingung

$$A_{22}A_{23} = A_{22}A_{32},$$

d. h.

$$d_1t + d_2d_1t + d_1(d_1t + d_2d_1t) = d_2t + d_1d_2t + d_2(d_2t + d_1d_2t)$$

oder

$$d_1d_2d_1t = d_2d_1d_2t$$

gelten

(F) Betrachten wir die Transformation[1]

$$(1) \qquad \mathfrak{x}^*(u^1, u^2) = \lambda(u^1, u^2)\,\mathfrak{x}(u^1, u^2),$$

wo $\mathfrak{x}^*$ die Kreisflache, $\mathfrak{x}$ die gewohnliche Flache bedeutet, da

$$(2) \qquad u^1 = t, \quad u^2 = \tau$$

gilt.

Aus (1) ergibt sich[2]

$$\begin{cases} ds^* = \lambda ds, \\ G^*_{hk} = \lambda^2 G_{hk}, \\ \overset{*}{G}{}^{rs} = \lambda^{-2} G^{rs}, \\ \dfrac{\partial G^*_{hk}}{\partial u^j} = \lambda^2 \dfrac{\partial G_{hk}}{\partial u^j} + 2\lambda\lambda^j G_{hk}, \\ \overset{*}{\Gamma}{}^r_{ik} = \Gamma^r_{ik} + \lambda^{-1} G^{rt}[\lambda_k G_{it} + \lambda_i G_{kt} - \lambda_t G_{ik}], \\ \overset{*}{G}{}^{st} E^*_{rs} = G^{st} E_{rs}, \qquad\qquad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

(1) NAKAZIMA, S.: Kugelgeo. von MÖBIUS, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. II, S. 36.

(2) Vgl. TAKASU, T.: Differentialkugelgeo, II, Science Reports of the Tôhoku Imp. Univ. XVII, p. 505.

(**G**) Gehen wir auf einer Kugel $\mathfrak{z}$ ein Paar von drei Punkten

$$\mathfrak{x}^{\alpha}\ [\alpha = \mathrm{I,\ II,\ III}]$$

und auf einer weiteren Kugel $\mathfrak{z}^*$ ebenfalls ein Paar von drei Punkten $\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha}$ vor, so gibt es genau 8 MÖBIUStransformationen des Raumes, die die Figur $\{\mathfrak{z}\mathfrak{x}^{\alpha}\}$ in die Figur $\{\overset{*}{\mathfrak{z}}\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha}\}$ überführen, wo $\mathfrak{x}^{\alpha}$, $\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha}$ die Kugeln in $R_3$ bedeuten.

Wir können zunächst durch eine Ähnlichkeit $\mathfrak{z}$ in $\mathfrak{z}^*$ überführen, dann gehen die $\mathfrak{x}^{\alpha}$ in ein Paar von drei Punkten $\bar{\mathfrak{x}}^{\alpha}$ auf $\mathfrak{z}^*$ über.

Man kann dann auf vier verschiedene Weisen durch eine Kreisverwandschaft auf $\mathfrak{z}^*$ die $\bar{\mathfrak{x}}^{\alpha}$ in die $\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha}$ überführen.

Zu jeder solchen Kreisverwandschaft haben wir dann nach dem eben Ausgeführten noch zwei zugehörige Transformationen des Raumes.

Diese 8 Abbildungen sind nun auch die einzig möglichen. Denn die Figur $\{\mathfrak{z}^*\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha}\}$ kann, wenn man die Identität mitrechnet, nur durch vier Transformationen in sich übergeführt werden.

Zunächst gibt es zu der Identität auf der Kugel $\mathfrak{z}^*$ 4 Kreisverwandtschaften, einmal die Inentität des Raumes, dann die Inversion auf $\mathfrak{z}^*$, die alle Punkte von $\mathfrak{z}^*$ in Ruhe lässt. Dann gibt es die Inversion auf $\mathfrak{z}^*$, die den Kreis durch die Punkte $\mathfrak{x}^{\alpha}$ auf $\mathfrak{z}$ punktweise in Ruhe lässt, und zu dieser gibt es 4 Transformationen im Raum, von denen man wieder die eine aus der andern erhält, indem man noch die Inversion an $\mathfrak{z}^*$ ausführt.

(**H**) Im folgenden möchten wir die Kreise in $R_2$ erklären.

Ist $\xi$ ein Kreis und $\mathfrak{z}$ ein nicht auf ihm gelegener Kreis, so ist

$$(1) \qquad \mathfrak{y} = 2(\mathfrak{z}\xi)\xi - \mathfrak{z}$$

der zu $\mathfrak{z}$ in bezug auf den Kreis $\xi$ inverse Kreis.

Zwei Kreise $\xi$ und $\eta$ bestimmen einen Kreisbüschel, dessen $\infty^1$ Kreise $\zeta$ gegeben werden durch

$$(2) \qquad \zeta = \alpha\xi + \beta\eta$$

wo $\alpha$ und $\beta$ irgendwelche skalare Zahlen sind.

Aus (1) und (2) folgt

(3) $\quad (\mathfrak{z}\mathfrak{y}) = \alpha(\mathfrak{z}\xi) + 2\beta(\mathfrak{z}\xi)(\xi\eta) - \beta(\eta\mathfrak{z}),$

daraus ergibt sich;

(4) $\quad \cos\phi_1 = \alpha\cos\phi_2 + 2\beta\cos\phi_2\cos\phi_3 - \beta\cos\phi_4,$

wo $\phi_1$ der Winkel zwischen $\zeta$ und $\mathfrak{y}$, $\phi_2$ der zwischen $\mathfrak{z}$ und $\xi$, $\phi_3$ der zwischen $\xi$ und $\eta$, $\phi_4$ der swischen $\eta$ und $\mathfrak{z}$ ist.

## (2)

(**A**) Im folgenden möchten wir die Geometrie auf der Kreisfläche (K) untersuchen.

(1) $\quad \Theta \equiv (\theta_t\theta_t)\,dt^2 + 2(\theta_t\theta_\tau)\,dtd\tau + (\theta_\tau\theta_\tau)\,d\tau^2 = 0$

bezeichnen die Minimallinien auf (K).

Nun nehmen wir ein anderes Kurvensystem

(2) $\quad \mathrm{L} \equiv (l_tl_t)\,dt^2 + 2(l_tl_\tau)\,dtd\tau + (l_\tau l_\tau)\,d\tau^2 = 0$

auf (K), so folgt

(3) $$\left(\frac{1+n}{1-n}\right)^2 \frac{\mathrm{H}_{0l}^2}{4\,\mathrm{K}_{0l}}$$

wo

(4) $$\begin{cases} n = \dfrac{\sin(\theta_1, l_1)}{\sin(l_1, \theta_2)} : \dfrac{\sin(\theta_1, \theta_2)}{\sin(l_2, \theta_2)}, \\ \mathrm{H}_{0l} = \{(\theta_\tau\theta_\tau)(l_tl_t) - 2(\theta_t\theta_\tau)(l_tl_\tau) + (\theta_t\theta_t)(l_\tau l_\tau)\} \\ \qquad\qquad : \{(\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau) - (\theta_t\theta_\tau)^2\}, \\ \mathrm{K}_{0l} = \{(l_tl_t)(l_\tau l_\tau) - (l_tl_\tau)^2 : \{(\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau) - (\theta_t\theta_\tau)^2\} \end{cases}$$

$\theta_i$, $l_i$ bezeichnen die Tangentenpaare von (1) bzw. (2) gelten.[1]

Wenn

(5) $\quad n = -1$

in (3), so

(1) KNOBLAUCH, J.: Grundlagen der Differentialgeometrie, Leipzig und Berlin 1913, S. 469.

(6) $\quad H_{0l} = 0$.

Die Forderung $n=0$ würde

(7) $\quad H_{0l}^2 - 4K_{0l} = 0$

geben.

In KNOBLAUCHS Buch[1] kann man die Deutungen von

(8) $$\frac{\partial(\theta, L)}{\partial(dt, d\tau)}$$

und

(9) $$\frac{\partial(\theta, L)}{\partial(dt, d\tau)} = 0$$

leicht erkennen.

(**B**) In dem Falle der Kreisfläche werden die Relativkrümmungslinien mit

$$\begin{vmatrix} (dt)^2, & dtd\tau, & (d\tau)^2 \\ (\theta_\tau\theta_\tau), & -(\theta_t\theta_\tau), & (\theta_t\theta_t) \\ (\widehat{\theta_\tau\theta_\tau}), & -(\widehat{\theta_t\theta_\tau}), & (\widehat{\theta_t\theta_t}) \end{vmatrix} = 0$$

gegeben.[2]

(**C**) Wir betrachten auf einer Kreisfläche eine Kurvenschar,

(1) $\quad \varphi(t, \tau) = C$

wo C eine Konstante ist.

Für die positive Seite von (1) gilt

(2) $$\delta\varphi \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\partial t + \frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\,\partial\tau > 0.$$

Nun nimmt die Bedingung der Orthogonalität vot $t$ und $t'$

(3) $$(\theta_t\theta_t)\,dt\delta t + (\theta_t\theta_\tau)\,(dt\delta\tau + d\tau\delta t) + (\theta_\tau\theta_\tau)\,d\tau\delta\tau = 0$$

(1) KNOBLAUCH, a. a. O., S. 470.

(2) SALKOWSKI, E.: Affine Differentialgeometrie, Berlin und Leipzig, (1934), S. 171.

die Form an:

$$(4)\qquad \left\{(\theta_t\theta_t)\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}-(\theta_t\theta_\tau)\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\}\partial t+\left\{(\theta_t\theta_\tau)\frac{\partial\varphi}{\theta\tau}-(\theta_\tau\theta_\tau)\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\}\partial\tau=0,$$

wo $t$ und $t'$ in KNOBLAUCHS Buch[1] stehen.

Ersetzt man sie unter der Einführung eines Proportionalitatsfaktors durch

$$(5)\qquad \begin{cases}\partial t=\nu\left\{(\theta_\tau\theta_\tau)\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}-(\theta_t\theta_\tau)\dfrac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right\},\\[2ex] \partial\tau=\nu\left\{(\theta_t\theta_t)\dfrac{\partial\varphi}{\partial\tau}-(\theta_t\theta_\tau)\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right\},\end{cases}$$

so findet man

$$(6)\qquad \partial\varphi=\nu\left[\left\{(\theta_\tau\theta_\tau)\frac{\partial\varphi}{\partial t}-(\theta_t\theta_\tau)\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right\}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\left\{(\theta_t\theta_t)\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}-(\theta_t\theta_\tau)\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right],$$

wo $\nu>0$ gilt.

(**D**) Wenn

$$(1)\qquad (\theta_\tau\theta_\tau)\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right)^2-2(\theta_t\theta_\tau)\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}+(\theta_t\theta_t)\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\right)^2 =f\{(\theta_t\theta_t),\ (\theta_t\theta_\tau),\ (\theta_\tau\theta_\tau)\}$$

gilt, so folgt die nach $a$ differentierte

$$(2)\qquad (\theta_\tau\theta_\tau)\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t\partial a}-(\theta_t\theta_\tau)\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\tau\partial a}+\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t\partial\tau}\right)+(\theta_t\theta_t)\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\tau\partial a}=0,$$

wo $a$ ein Parameter ist.

---

(1) KNOBLAUCH, J.: Grundlagen der Differentialgeometrie (1913), S. 131.

Aus (2) folgt

$$(3)\qquad \left\{(\theta_\tau\theta_\tau)\frac{\partial\vartheta}{\partial t}-(\theta_t\theta_\tau)\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\right\}\frac{\partial\cdot\partial\vartheta/\partial\alpha}{\partial t}+\left\{(\theta_t\theta_t)\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}-(\theta_t\theta_\tau)\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right\}\frac{\partial\cdot\partial\vartheta/\partial\alpha}{\partial\tau}=0,$$

d. h.

$$(4)\qquad \triangle(\theta,\psi)=0,$$

wo $\psi=\partial\vartheta/\partial\alpha$ ist.

Aus (2) kann man wissen, dasz die Gleichung $\partial\vartheta/\partial\alpha=C$ also mit den beiden willkürlichen Konstanten $\alpha$ und C die geodätischen Linien darstellt.[1]

(E) Wir betrachten die besoneren Kreisflächen, deren Bogenelement $ds$ mit

$$(1)\qquad ds=(\theta_t\theta_t)\,dt^2+2\,(\theta_t\theta_\tau)\,dtd\tau+d\tau^2$$

gegeben wird.

In diesem Falle kann man setzen:

$$(2)\qquad \overline{MP}^2=(\theta_t\theta_t)\,\alpha^2+2\,(\theta_t\theta_\tau)\,\alpha\beta+\beta^2+\cdots,$$

wo MP in KLEINs Buch[2] steht.

Wenn $\mathfrak{x}=\mathfrak{x}(t,\tau)$ die Minimalfläche bedeutet, so muss

$$(3)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial\mathfrak{x}/\partial t-(\theta_t\theta_\tau)\,\partial\mathfrak{x}/\partial\tau}{T}\right\}+\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\frac{(\theta_t\theta_t)\cdot\partial\mathfrak{x}/\partial\tau-(\theta_t\theta_\tau)\cdot\partial\mathfrak{x}/\partial t}{T}\right\}=0$$

sein, wo

$$(4)\qquad T^2=(\theta_t\theta_t)-(\theta_t\theta_\tau)^2$$

ist, da $\mathfrak{x}=\mathfrak{x}(t,\tau)$ eine Kreisfläche bedeutet.[3]

(1) KNOBLAUCH, J.: Grundlagen der Differentialgeometrie (1913), S. 308.
(2) BLASCHKE, W.: Kleins Vorlesungen über höhere Geometrie, Berlin (1926), S. 345.
(3) KNOBLAUCH, J.: Differentialgeo. (1913), S. 432.

Wenn

$$(5) \qquad (\theta_t\theta_t) = 0$$

in (1), so

$$(6) \qquad \begin{cases} ds^2 = 2(\theta_t\theta_\tau)\,dtd\tau + d\tau^2 \\ \quad = \{2(\theta_t\theta_\tau)\,dt + d\tau\}\,d\tau \\ \quad = d\bar{t}\cdot d\bar{\tau}\,, \end{cases}$$

wo $d\bar{t} = 2(\theta_t\theta_\tau)\,dt + d\tau$ d. h. $\bar{t} = 2\int(\theta_t\theta_\tau)\,dt + \tau$ und $\bar{\tau} = \tau$ gesetzt ist, da $(\theta_t\theta_\tau)$ nur von $t$ abhängt.

In den neuen Parametern $\bar{t}$ und $\bar{\tau}$ nimmt nun das Bogenelement-Quadrat (1) die Form an:

$$(7) \qquad ds^2 = d\bar{t}\cdot d\bar{\tau}\,,$$

und hierin hängt $(\theta_t\theta_\tau)$ unr von $t$ ab.

Aber ist es auch

$$(8) \qquad \bar{t} - \bar{\tau} = 2\int(\theta_t\theta_\tau)\,dt\,,$$

d. h. $\bar{t} - \bar{\tau}$ hängt auch nur von $t$ ab.

(F) Bedeutet $f(t, \tau)$ eine Funktion des Ortes[1] auf einer Kreisfläche mit den Parametern $t$ und $\tau$, so ist die Weggeschwindigkeit $df : ds$, mit der sich der Wert der Funktion $f$ beim Fortschreiten von einem Kreisflächenpunkte $(t, \tau)$ auf irgend einer Richtung $(d\tau : dt)$ oder (K) ändert, die Funktion von $t$, $\tau$ und $k$:

$$f_\tau\,\{(\theta_t\theta_t) + (\theta_t\theta_\tau)\,k + (\theta_\tau\theta_\tau)\,k^2\} - (f_t + f_\tau)\,\{(\theta_t\theta_\tau) + (\theta_\tau\theta_\tau)\,k\} = 0\,.$$

(G) Betrachten wir die allgemeine Schraubenfläche als Kreisfläche, so kann man setzen[2]

$$(1) \qquad (\theta_t\theta_t) = \tau^2 + q^2\,, \quad (\theta_t\theta_\tau) = 0\,, \quad (\theta_\tau\theta_\tau) = 1\,,$$

daraus ergibt sich

$$(2) \qquad (\tau^2 + q^2)\,dt^2 + d\tau^2 = 0$$

(1) SCHEFFERS, G.: Theorie der Flächen, S. 419 und S. 421.
(2) SCHEFFERS, G.: Theorie der Flächen, Berlin und Leipzig (1922), S. 221.

als Minimallinie auf dieser Fläche.

Aus (2) folgt

$$(3) \qquad i\,dt = \pm \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+q^2}},$$

d. h.

$$(4) \qquad it = \log(\tau \pm \sqrt{2^2+d^2}) + \text{const.},$$

wo $i = \sqrt{-1}$, $q$ eine Konstante ist.

(H) Es mögen auf beiden Kreisflächen ($K_1$) und ($K_2$) zwei entsprechende Systeme $(t, \tau)$ zu Parameterlinien gewählt werden. Dann können wir

$$(1) \qquad \{(\theta_t\theta_\tau)_1(\theta_t\theta_t)_2 - (\theta_t\theta_\tau)_2(\theta_t\theta_t)_1\}\,dt^2 + \{(\theta_t\theta_t)_2 - (\theta_t\theta_t)_1\}\,dtd\tau + \{(\theta_t\theta_\tau)_2 - (\theta_t\theta_\tau)_1\}\,d\tau^2 = 0$$

auf eine und nur auf eine Weise gleichzeitig zum Orthoganalsysteme bringen, falls nicht die Proportionale

$$(2) \qquad (\theta_t\theta_t)_1 : (\theta_t\theta_\tau)_1 : (\theta_\tau\theta_\tau)_1 = (\theta_t\theta_t)_2 : (\theta_t\theta_\tau)_2 : (\theta_\tau\theta_\tau)_2$$

gilt.[1]

Aus (1) folgt

$$(3) \qquad \begin{cases} t = \text{const.}, \\ t + \tau = \text{const.}, \end{cases}$$

wenn

$$(4) \qquad (\theta_t\theta_t)_1 \neq (\theta_t\theta_t)_2, \quad (\theta_t\theta_\tau)_2 = (\theta_t\theta_\tau)_1$$

gilt.

Aus (1) folgt

$$(5) \qquad (\theta_t\theta_t)_1\,dt^2 + d\tau^2 = 0,$$

wenn

(1) EISENHART, L. P.: A treatise on the differential geometry of curves and surfaces, p. 82.

$$(6)\qquad (\theta_t\theta_t)_1=(\theta_t\theta_t)_2,\quad (\theta_t\theta_\tau)_1\neq(\theta_t\theta_\tau)_2,$$

denn

$$(7)\qquad (\theta_\tau\theta_\tau)_1=(\theta_\tau\theta_\tau)_2=1$$

gilt.[1]

(I) Betrachten wir eine Kugel als Kreisfläche, so kann man setzen

$$(1)\quad (\theta_\tau\theta_\tau)=1,\quad (\theta_t\varphi_\tau)=0,\quad (\theta_t\theta_t)=\cos^2\tau\,.$$

Die Differentialgleichungen der Minimallinien sind

$$(2)\qquad d\tau\pm i\cos\tau\,dt=0,\quad i=\sqrt{-1}\,.$$

Da können wir als Integrale der Differentialgleichungen der Minimalkurven auch

$$(3)\qquad \begin{cases}\mathfrak{u}=(\cos t+i\sin t)\tan\left(\frac{1}{2}\tau+\frac{1}{4}\pi\right),\\ \mathfrak{v}=(\cos t-i\sin t)\tan\left(\frac{1}{2}\tau+\frac{1}{4}\pi\right)\end{cases}$$

setzen.[2]

(J) Wir sehen, wie sich die Inversion von Kreisflächen ändert $\Omega'$ in ROTHES Arbeit[3] nach

$$\Omega^*=d\log\mathrm{R}+\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial p}\log\frac{(\theta_\tau\theta_\tau)}{(\theta_t\theta_t)}dp+\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial q}\log\frac{(\theta_t\theta_t)}{(\theta_\tau\theta_\tau)}dq$$

und die Gröszen R und $(\theta_\tau\theta_\tau)/(\theta_t\theta_t)$ invariant bleiben, so ist auch $\Omega^*$ eine Invariante der Inversion.

**(K)** Setzen wir

$$(1)\qquad \varphi^2=\frac{(\overline{\theta_t\theta_t})}{(\theta_t\theta_t)}=\frac{(\overline{\theta_t\theta_\tau})}{(\theta_t\theta_\tau)}=\frac{(\overline{\theta_\tau\theta_\tau})}{(\theta_\tau\theta_\tau)}$$

(1) NAKAZIMA, S.: Kugelgeometrie von MÖBIUS, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. 2, S. 36.

(2) SCHEFFERS, G.: Theorie der Flachen, S. 77.

(3) ROTHE, R.: Inversion und konforme Abbildung von Flachen, Math. Annalen, 72 (1912), S. 70.

in zwei Kreisflächen (K) und $(\bar{K})$, so gilt

$$(2)\qquad (\theta_\tau\theta_\tau)\frac{\partial \log\varphi}{\partial t} = (\theta_t\theta_\tau)\frac{\partial \log\varphi}{\partial \tau}.$$

Ist

$$(3)\qquad \tau_1(t,\tau) = \text{const.}$$

eine Lösung von

$$(4)\qquad (\theta_t\theta_\tau)\,dt + (\theta_\tau\theta_\tau)\,d\tau = 0,$$

so gilt

$$(5)\qquad \varphi - \Phi(\tau_1).$$

Ist

$$(6)\qquad (\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau) - (\theta_t\theta_\tau)^2 \neq 0,$$

so hat

$$(7)\qquad \begin{cases} (\theta_\tau\theta_\tau)\dfrac{\partial \log\varphi}{\partial t} - (\theta_t\theta_\tau)\dfrac{\partial \log\varphi}{\partial \tau} = 0, \\ (\theta_t\theta_\tau)\dfrac{\partial \log\varphi}{\partial t} - (\theta_t\theta_t)\dfrac{\partial \log\varphi}{\partial \tau} = 0 \end{cases}$$

nur eine gemeinsame Lösung

$$(8)\qquad \varphi = \text{const.},$$

Weiter kann man zwei Kreisflächen, deren Bogenelemente $ds$, $d\bar{s}$

$$(9)\qquad ds^2 = dt^2 + 2\Phi(t+\tau)\,dt\,d\tau + d\tau^2,$$

bzw.

$$(10)\qquad d\bar{s}^2 = dt^2 + 2\Phi(t-\tau)\,dt\,d\tau + d\tau^2$$

sind, finden.[1]

(1) OGURA. K.: Trajectories in the conservative field of force, part I, Tôhoku Math. Journ. 7 (1915), S. 181.

(**L**) Ist

$$(1) \qquad \mathfrak{x} = f_1(t) + \phi_1(\tau)$$

die Gleichung einer Kreisfläche (K), so gilt[1]

$$(2) \qquad \begin{cases} (\theta_t\theta_t) = 1\,, \\ (\theta_t\theta_\tau) = f_1'\phi_1' + f_1'\phi_2' + f_3'\phi_3'\,, \\ (\theta_\tau\theta_\tau) = 1\,, \end{cases}$$

woraus man wissen kann, dasz die Gleichung der Minimallinien mit

$$(3) \qquad dt^2 + 2\,\{f_1'\phi_1' + f_2'\phi_2' + f_3'\phi_3'\}\, dtd\tau + d\tau^2 = 0$$

gegeben wird.

Ein Kurvennetz

$$(4) \qquad \mathrm{A}\,(t,\tau)\,dt^2 + 2\,\mathrm{B}\,(t,\tau)\,dtd\tau + \mathrm{C}\,(t,\tau)\,d\tau^2 = 0$$

auf (K) ist dann und nur dann ein Orthogonalsystem, wenn

$$(5) \qquad \mathrm{C} - 2\,\{f_1'\phi_1' + f_2'\psi_2' + f_3'\phi_3'\}\,\mathrm{B} + \mathrm{A} = 0$$

gilt.

Wenn

$$(6) \qquad \mathrm{A} = \mathrm{C} = 1$$

in (4), so folgt aus (5)

$$(7) \qquad \mathrm{B} = \{f_1'\phi_1' + f_2'\phi_2' + f_3'\psi_3'\}^{-1}.$$

Hiernach lautet die Formel von Flächeninhalt S auf (K):

$$(8) \qquad \mathrm{S} = \iint \sqrt{1 - \{f_1'\psi_1' + f_2'p_2' + f_3'\psi_3'\}^3}\, dtd\tau\,.$$

(**M**)

$$(\theta_t\theta_\tau) = 0\,, \quad (\log(\theta_t\theta_t)/(\theta_\tau\theta_\tau))_{t\tau} = 0$$

ist die Bedingung dafür, dasz

$$t = \text{const.}\,, \quad \tau = \text{const}$$

(1) OGURA, K.: On the T-system on a surface, Tôhoku Math. Journ. 9 (1916), S. 94.

auf der Kreisfläche isothermisch und orthoganal sind.

(N) Betrachten wir eine Rotationsfläche auf der Kreisfläche (K), so kann man setzen

$$(1) \qquad (\theta_t\theta_t) = p(\tau)^2, \quad (\theta_t\theta_\tau) = 0, \quad (\theta_\tau\theta_\tau) = 1.$$

Die Breitenkreisen ($\tau$) sind nur diejenigen geodätischen Kurven für die

$$(2) \qquad \sqrt{(\theta_t\theta_t)}\,\{\sqrt{(\theta_t\theta_t)}\}'_\tau = 0$$

ist.[1]

Die übrigen geodätischen Kurven bestimmen sich nach

$$(3) \qquad \frac{d^2t}{d\tau^2} + \sqrt{(\theta_t\theta_t)}\,\{\sqrt{(\theta_t\theta_t)}\}'_\tau\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^3 + 2\,\frac{\{\sqrt{(\theta_t\theta_t)}\}'_\tau}{\sqrt{(\theta_t\theta_t)}}\,\frac{dt}{d\tau} = 0.$$

Man kann diese Gleichung geometrisch deuten, wenn man den Winkel $\alpha$ einführt, den die gesuchte geodätische Kurve an der Stelle $(t, \tau)$ mit dem Meridian $(t)$ dieser Stelle bildet.

Da längs der Meridiankurve $(t)$ das Verhältins $dt : d\tau$ gleich null, längs der geodätischen Linie gleich der in der vorstehenden Gleichung auftretenden ersten Ableitung von $t$ ist, gilt

$$(4) \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+(\theta_t\theta_t)(dt/d\tau)^2}}.$$

Von dem Fall $\sqrt{(\theta_t\theta_t)} = 0$ ist abzusehen, da er nur die in Punkte ausgearteten Breitenkreise liefert.

Die Ableitung $\{\sqrt{(\theta_t\theta_t)}\}'_\tau$ des Radius des Breitenkreises $(\tau)$ ist gleich Null, wenn die Tangente der Meridiankurve der Drehachse parallel ist.

Längs einer geodätischen Kurve der Kreisfläche $t$ musz eine Funktion von $\tau$ die Form sein:

$$(5) \qquad t = m\int\frac{d\tau}{\sqrt{(\theta_t\theta_t)}\,\sqrt{(\theta_t\theta_t)-m^2}} + \text{const.}\ (m = \text{const.}).$$

(1) SCHEFFERS, G.: Theorie der Flächen, S. 480.

$$(6)\qquad \begin{cases} \sqrt{(\theta_t\theta_t)} = a \operatorname{bos} \sqrt{K}\tau + b \sin \sqrt{K}\tau, \\ (a = \text{konst.}, \quad b = \text{konst.}) \end{cases}$$

ist die allgemeinste $(\theta_t\theta_t)$, für die die Rotationskreisfläche (K) die konstante Krümmung K hat.

Die Kurve des $\infty^2$ Loxodromes auf (K) ist

$$(7)\qquad t = A\int \frac{\sigma(\tau)}{\sqrt{(\theta_t\theta_t)}}\,d\tau + B, \quad (A, B = \text{const.})$$

wo

$$(8)\qquad \begin{cases} d\tau = \alpha(\tau)\cdot\varepsilon, \qquad dt = \varepsilon, \\ \dfrac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)} = \dfrac{\{\sqrt{(\theta_t\theta_t)}\}'}{\sqrt{(\theta_t\theta_t)}} - \dfrac{\sigma'(\tau)}{\sigma(\tau)}, \quad \sigma^2(\tau) = [\{\sqrt{(\theta_t\theta_t)}\}'_\tau]^2 + [q'(\tau)]^2 \end{cases}$$

gilt.[1]

Da ist $\varepsilon$ infinitesimal.

Für die Kugel, deren Radius gleich I ist, wird

$$(9)\qquad t = A \log\tan\left(\frac{\tau}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + B.$$

Aus (4) folgt

$$(10)\qquad \frac{dt}{d\tau} = \varepsilon\frac{\tan\alpha}{\sqrt{(\theta_t\theta_t)}}$$

wo $\varepsilon = \pm 1$ ist.

Längs der geodätischen Kurve ist nun wie $t$ auch $\alpha$ eine Funktion von $\tau$, so dasz die Differentiation nach $\tau$ den folgenden Wert der zweiten Ableitung von $t$ liefert:

$$(11)\qquad \frac{d^2t}{d\tau^2} = \varepsilon\left[\frac{1}{\sqrt{(\theta_t\theta_t)}\cos^2\alpha}\,\frac{d\alpha}{d\tau} - \frac{\tan\alpha}{(\theta_t\theta_t)}\left\{\sqrt{(\theta_t\theta_t)}\right\}'\right].$$

Setzen wir die Werte der Ableitungen in (3) ein, so kommt zustande

$$(12)\qquad \frac{1}{\tan\alpha}\,\frac{d\alpha}{d\tau} + \frac{\{\sqrt{(\theta_t\theta_t)}\}'}{\sqrt{(\theta_t\theta_t)}} = 0$$

(1) NOBLE, C. A.: Note on Loxodromes, American Math. Society, XII, S. 117.

oder

$$(13) \qquad \frac{1}{\sin\alpha}\frac{d\sin\alpha}{d\tau}+\frac{\{\sqrt{(\theta_t\theta_t)}\}'}{\sqrt{(\theta_t\theta_t)}}=0\,.$$

Diese Gleichung besagt, dasz $(\sqrt{\theta_t\theta_t})\sin\alpha$ konstant ist:

$$(14) \qquad \sqrt{(\theta_t\theta_t)}\sin\alpha=\text{konst.},$$

da $\sqrt{(\theta_t\theta_t)}$ der Radius des Breitenkreises ist.

Man kann auf unendlich viele Arten jedem Punkt $(t, \tau)$ der Kreisfläche (K) einen Punkt $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ der Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{y}$ gesetzmäszig zuordnen.

Dies geschieht dadurch, dasz man auch $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ als irgendwelche Funktionen $\Phi$ und $\Psi$ von $t$ und $\tau$ definiert

$$(15) \qquad \begin{cases}\mathfrak{x}=\Phi(t,\tau)\,,\\ \mathfrak{y}=\Psi(t,\tau)\,,\end{cases}$$

wo

$$(16) \qquad \{\Phi_\tau\Psi_t-\Psi_\tau\Phi_t\}^2=(\theta_t\theta_t)$$

gilt.[1]

Bezeichnen wir das Bogenelement längs des Meridians mit $ds$, so ist

$$(17) \qquad ds^2=d\tau^2+(\theta_t\theta_t)\,d\tau^2.$$

Werden aber

$$\int\frac{d\tau}{\sqrt{(\theta_t\theta_t)}} \quad \text{und} \quad t$$

als neue Parameter $\bar{\tau}$ und $\bar{t}$ benutzt, so wird

$$(18) \qquad ds^2=(\theta_t\theta_t)(d\bar{\tau}^2+\bar{t}^2)\,,$$

indem $(\theta_t\theta_t)$ jetzt eine Funktion von $\bar{\tau}$ allein bedeutet.

(O) Wenn wir die gemeine Schraubenfläche als unsere Kreisfläche betrachten, so können wir setzen

1) SCHEFFERS, a. a O., S. 56.

$$(1) \qquad (\theta_t\theta_t) = \tau^2 + q^2, \quad (\theta_t\theta_\tau) = 0\,, \quad (\theta_\tau\theta_\tau) = 1\,,$$

und lautet die Differentialgleichung der Krümmungskurven:

$$(2) \qquad (\theta_t\theta_t)\, dt^2 - d\tau^2 = 0\,.$$

Sie ist in der Form

$$(3) \qquad dt = \pm \frac{d\tau}{\sqrt{(\theta_t\theta_t)}}$$

sofort zu integrieren und ergibt.[1]

$$(4) \qquad t = \log\{\tau \pm \sqrt{(\theta_t\theta_t)}\} + \text{konst.}.$$

## ( 3 )

(**A**) Wir untersuchen

$$(1) \qquad \cos^2\varphi = T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\alpha$$

wieder,[2] so folgt

$$(2) \qquad T^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \cos^2\varphi}{\partial\rho_\alpha\partial\rho_\beta}$$

und

$$(3) \qquad \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial\rho_\alpha}\rho_\alpha\rho_\beta = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\cos^2\varphi}{\partial\rho_\alpha\partial\rho_\beta\partial\rho_\gamma}\rho_\alpha\rho_\beta = 0\,.$$

(**B**) Der Inhalt von $\triangle$OPA ist

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta\cdot(A^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta})\,\rho_\alpha\rho_\beta}$$

wo

$$\angle OAP = \angle R\,, \quad \angle OPA = \varphi\,, \quad \overline{OP} = 1$$

gelten.

(1) SCHEFFERS, G.: Theorie der Flächen, S. 136.
(2) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geo. der Kreise und Kugeln (XXV), Mem. of the Fac. of Sci. aed Agri., Taihoku Im. Univ., Vol. XXI, S. 73.

(C) Wir betrachten[1]

$$(1)\quad \begin{cases} A^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta, \\ T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta, \end{cases}$$

so können wir (1) immer durch eine Transformation in

$$(2)\quad \begin{cases} \rho_{\mathrm{I}}^2 + \rho_{\mathrm{II}}^2, \\ T^{11}\rho_{\mathrm{I}}^2 + T^{22}\rho_{\mathrm{II}}^2 \end{cases}$$

übertragen.

In diesem Falle gilt

$$(3)\quad \{T^{11}\rho_{\mathrm{I}}^2 + T^{22}\rho_{\mathrm{II}}^2\} : \{\rho_{\mathrm{I}}^2 + \rho_{\mathrm{II}}^2\} = T^{11}\cos^2 w + T^{22}\sin^2 w,$$

wo

$$(4)\quad \begin{cases} \cos^2 w = \rho_{\mathrm{I}}^2 : \{\rho_{\mathrm{I}}^2 + \rho_{\mathrm{II}}^2\}, \\ \sin^2 w = \rho_{\mathrm{II}}^2 : \{\rho_{\mathrm{I}}^2 + \rho_{\mathrm{II}}^2\} \end{cases}$$

sind.

(D) Wir untersuchen die Kreise

$$(1)\quad \mathfrak{x}^a = \mathfrak{x}^a(u, v), \quad (u_1 \leqq u \leqq u_2,\ v_1 \leqq v \leqq v_2),\ a = \mathrm{I}, \mathrm{II},$$

in $R_2$, wo $\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}, \mathfrak{x}^{\mathrm{II}}$ die Kugeln in $R_3$, $u, v$ die Parameter sind.

Aus (1) folgt

$$(2)\quad \frac{\partial t}{\partial v} = \int_{u_1}^{u_2} \frac{\partial F}{\partial v}\, du,$$

wo

$$(3)\quad t = \int_{u_1}^{u_2} F(\mathfrak{x}, \dot{\mathfrak{x}})\, du.$$

Wir betrachten

$$(4)\quad V_\mu^a(\mathfrak{x}, \xi)$$

wo

(1) NAKAZIMA, S.: Differentialgeo. der Kreiesscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ, 34, p. 197.

$$(5)\quad \begin{cases} V^{\alpha}_{\mu}(\mathfrak{x},\xi) \equiv \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\,\xi^{\beta} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \xi^{\tau}}{\partial u}\, T_{\mu\beta\tau}\, T^{\beta\alpha} \\[2ex] \xi^{\alpha} = \dfrac{\partial \mathfrak{x}^{\alpha}}{\partial u}, \quad \eta^{\alpha} = \dfrac{\partial \mathfrak{x}^{\alpha}}{\partial v}, \\[2ex] \theta x^{\alpha} \equiv \dfrac{dx^{\alpha}}{du} + V^{\alpha}_{\beta}(\mathfrak{x},\xi)\, X^{\beta} \end{cases}$$

gelten.

Daraus folgt

$$(6)\quad \begin{cases} \delta t = \delta v \displaystyle\int_{u_1}^{u_2} \frac{T_{\alpha\beta}\xi^{\alpha}\eta^{\beta}}{F}\, du \\[2ex] \partial/\partial u\,[T_{\alpha\beta}\xi^{\alpha}\eta^{\beta}] = \theta\,[T_{\alpha\beta}\xi^{\alpha}\eta^{\beta}] = T_{\alpha\beta}\bar{\xi}^{\alpha}\eta^{\beta} + T_{\alpha\beta}\xi^{\alpha}\bar{\eta}^{\beta}, \\[2ex] \delta t = \delta v \left\{ T_{\alpha\beta}\xi^{\alpha}\eta^{\beta} \Big|_{u_1}^{u_2} - \displaystyle\int_{u_1}^{u_2} T_{\alpha\beta}\bar{\xi}^{\alpha}\eta^{\beta}\, du \right\}, \\[2ex] \delta t = \delta v \left\{ |\eta|_{\mathfrak{x}} \cos(\xi,\bar{\xi})_{\mathfrak{x}} \Big|_{u_1}^{u_2} - \displaystyle\int_{u_1}^{u_2} |\bar{\xi}|_{\mathfrak{x}} |\eta|_{\mathfrak{x}} \cos(\bar{\xi},\eta)_{\mathfrak{x}}\, du \right\}. \end{cases}$$

( 4 )

(**A**) Wir betrachten einen Kreis $\mathfrak{a}$ in $R_2$, so bezeichnet $\mathfrak{x}$ in

$$(1)\quad (\mathfrak{a}\mathfrak{x})^2 - (\mathfrak{a}\mathfrak{a})(\mathfrak{x}\mathfrak{x})\cos^2\varphi_1 = 0$$

die Kreisschar, die mit $\mathfrak{a}$ einen konstanten Winkel $\varphi_1$ bildet in $R_2$.

Wir setzen (1) um in die Form

$$(2)\quad f(\mathfrak{x}) \equiv (\mathfrak{a}\mathfrak{x})^2 - \lambda_1(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = 0.$$

Weiter betrachten wir

$$(3)\quad \varphi(\mathfrak{x}) \equiv (\mathfrak{B}\mathfrak{x})^2 - \lambda_2(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = 0,$$

wo $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{x}$ die Kreise in $R_2$, $\lambda_i$ die Konstanten sind.

Aus (2), (3) bilden wir

$$(4)\quad f - \lambda\varphi = 0,$$

d. h.

$$(5)\quad (\mathfrak{a}\mathfrak{x})^2 - \lambda(\mathfrak{B}\mathfrak{x})^2 = \{\lambda_1 - \lambda_2\lambda\}(\mathfrak{x}\mathfrak{x}),$$

so bezeichnet (5) die Kreisscharen, die durch den Schnittpunkt von den Kreisen (2) und (3) gehen, wo $\lambda$ ein Parameter ist.

Insbesondere setzen wir $\lambda=1$ oder $\lambda=-1$ in (5), so folgt

$$(6)\qquad (\mathfrak{a}\mathfrak{x})^2-(\mathfrak{B}\mathfrak{x})^2=(\lambda_1-\lambda_2)(\mathfrak{x}\mathfrak{x}),$$

oder

$$(7)\qquad (\mathfrak{a}\mathfrak{x})^2+(\mathfrak{B}\mathfrak{x})^2=(\lambda_1+\lambda_2)(\mathfrak{x}\mathfrak{x}).$$

(6), $f(\mathfrak{x})$, (7) und $\varphi(\mathfrak{x})$ bilden die harmonische Trennung.

(**B**) Es seien drei Kreise $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ in $R_2$ gegeben.

$$(1)\qquad K_1\equiv\mathfrak{x}/(\mathfrak{y}\mathfrak{z})-\mathfrak{y}/(\mathfrak{x}\mathfrak{z})$$

ist der Kreis, der durch den Schnittpunkt von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ geht und zu $\mathfrak{z}$ senkrecht ist.

$$(2)\qquad K_2\equiv\mathfrak{y}/(\mathfrak{z}\mathfrak{x})-\mathfrak{z}/(\mathfrak{y}\mathfrak{x})$$

ist der Kreis, der durch den Schnittpunkt von $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ geht und zu $\mathfrak{z}$ senkrecht ist.

$$(3)\qquad K_3\equiv\mathfrak{z}/(\mathfrak{x}\mathfrak{y})-\mathfrak{z}/\mathfrak{x}(\mathfrak{z}\mathfrak{y})$$

ist der Kreis, der durch den Schnittpunkt von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{z}$ geht und zu $\mathfrak{y}$ senkrecht ist.

In unserem Falle gehen drei Kreise $K_1$, $K_2$ und $K_3$ durch einen Punkt, denn

$$K_1+K_2+K_3\ \ 0$$

gilt.

Dasselbe gilt für drei Kreise $K_1$, $K_2$ und $\bar{K}_3$, die den Winkel zwischen $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ bzw. $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{x}$ halbieren.

## ( 5 )

(**A**) (1) $\zeta(\alpha)\equiv\xi\cos\alpha+\dot{\xi}\sin\alpha$ und $\zeta(\frac{\pi}{2}-\alpha)\equiv\xi\sin\alpha+\dot{\xi}\cos\alpha$ bezeichnen[1] zwei Kreise in $R_2$.

(1) Vgl. MATUMURA, S.: Beiträge zur Geo. dar Kreise und Kugeln (XXV), Mem. of the Fac. and of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ. Vol. XXI, S. 69.

$$(2) \qquad \mathfrak{x} = \zeta(\alpha) + i\zeta\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right), \quad i = \sqrt{-1}$$

bezeichnet einen Kreis in $R_2$, der durch den Schnittpunkt von $\zeta(\alpha)$ und $\zeta(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ geht.

Aus

$$(3) \qquad \mathfrak{x} = \{\xi \cos\alpha + \dot{\xi}\sin\alpha\} + i\,\{\xi\sin\alpha + \dot{\xi}\cos\alpha\} \equiv \zeta(\alpha) + i\zeta\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

und

$$(4) \qquad \mathfrak{y} = \{\eta\cos\alpha + \dot{\eta}\sin\alpha\} + i\,\{\eta\sin\alpha + \dot{\eta}\cos\alpha\}$$

folgt

$$(5) \qquad (\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = \{(\xi\eta) - (\dot{\xi}\dot{\eta})\}\cos 2\alpha + i\,[\{(\xi\eta) + (\dot{\xi}\dot{\eta})\}\sin 2\alpha + (\dot{\xi}\eta) + (\xi\dot{\eta})],$$

wo $\xi$, $\eta$ die Kreise in $R_2$ sind.

Aus (3) können wir wissen, dasz

$$(6) \qquad \cos\phi_1 = \{\cos\phi_2 - \cos\phi_3\}\cos 2\alpha + i\,[\{\cos\phi_2 + \mathrm{con}\,\phi_3\}\sin 2\alpha + \cos\phi_4 + \cos\phi_5]$$

gilt, wo

$$(7) \qquad \begin{cases} \phi_1 = \widehat{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}}, \\ \phi_2 = \widehat{\xi, \eta}, \\ \phi_3 = \widehat{\dot{\xi}, \dot{\eta}}, \\ \phi_3 = \widehat{\dot{\xi}, \eta}, \\ \phi_5 = \widehat{\xi, \dot{\eta}} \end{cases}$$

und $\alpha$ ein konstanter Winkel ist.

(**B**) Wir betrachten[1]

$$(1) \qquad \eta = \cos\alpha\cdot\xi + \sin\alpha\cdot d\xi/d\sigma,$$

so folgt

(1) THOMSEN, G.: Über konforme Geo. II, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ., IV Bd., S. 132.

$$(2) \qquad d\eta/d\alpha = -\sin \alpha \cdot \xi + \cos \alpha \cdot d\xi d\sigma .$$

Aus (1) und (2) ergibt sich

$$(3) \qquad \begin{cases} \xi = \eta \cos \alpha - d\eta/d\alpha \cdot \sin d, \\ a\xi/d\sigma = \eta \sin \alpha + d\eta/d\alpha \cdot \cos \alpha , \end{cases}$$

so können wir wissen, dasz, wenn der Kreis $\eta$ mit dem Kreis $\xi$ den Winkel $\alpha$ bildet, so $\xi$ mit $\eta$ den Winkel $-\alpha$ bildet.

Aus (1) folgt

$$(4) \qquad d^2\eta/d\alpha^2 = -\cos \alpha \cdot \xi - \sin \alpha \cdot d\xi/d\sigma = -\eta$$

d. h.

$$(5) \qquad d^2\eta/d\alpha^2 + \eta = 0 .$$

**(C)** Wir untersuchen zwei Kreise

$$(1) \qquad \eta = \cos \alpha \cdot \xi + \sin \alpha \cdot d\xi/d\sigma$$

und

$$(2) \qquad \bar{\eta} = \cos \bar{\alpha} \cdot \bar{\xi} + \sin \bar{\alpha} \cdot d\bar{\xi}/d\sigma ,$$

so bezeichnet

$$(3) \qquad \begin{cases} \zeta = A\eta + B\bar{\eta} \\ \quad = A \{\cos \alpha\, \xi + \sin \alpha \cdot d\xi/d\sigma\} \\ \qquad\qquad + B \{\cos \bar{\alpha} \cdot \bar{\xi} + \sin \bar{\alpha} \cdot d\bar{\xi}/d\sigma\} \end{cases}$$

einen Kreis, der durch den Schn.ttpunkt von $\eta$ und $\bar{\eta}$ geht.

Aus (3) folgt

$$(4) \qquad \begin{cases} (\mathfrak{x}\zeta) = A \cos \alpha\, (\xi\mathfrak{x}) + \sin \alpha\, (\mathfrak{x} \cdot d\xi/d\sigma) \\ \quad + B \cos \bar{\alpha}\, (\bar{\xi}\mathfrak{x}) + B \sin \bar{\alpha}\, (\eta \cdot d\bar{\xi}/d\sigma) \\ \quad = A \cos \alpha \cos \alpha_1 - A \sin \alpha \sin \alpha_1 \\ \quad + B \cos \bar{\alpha} \cos \bar{\alpha}_1 - B \sin \bar{\alpha} \sin \bar{\alpha}_1 \\ \quad A \cos (\alpha - \alpha_1) + B \cos (\bar{\alpha} - \bar{\alpha}_1), \end{cases}$$

wo $\mathfrak{x}$ einen Kreis bedeutet

$$a_1 = \widehat{\xi, \mathfrak{x}}, \quad \bar{a} = \widehat{\xi, \mathfrak{x}}$$

ist und A, B zwei skalare Grószen sind.

(**D**) Wir betrachten

$$(1) \qquad \begin{cases} \eta = \cos a \cdot \xi + \sin a \cdot \xi', \\ \zeta = \cos \varphi \cdot \eta + \sin \varphi \cdot \eta' \\ \xi = \cos \psi \, \zeta + \sin \psi \cdot \zeta'. \end{cases}$$

wo

$$(2) \qquad a + \varphi + \psi = 2\pi$$

gilt.

Wenn

$$(3) \qquad a = \zeta = \psi,$$

so

$$(4) \qquad a = \xi = \psi = 2\pi / 3,$$

daraus ergibt sich aus (1)

$$(5) \qquad \begin{cases} \eta = -\dfrac{1}{2} \cdot \xi + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \xi', \\ \zeta = -\dfrac{1}{2} \cdot \eta + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \eta', \\ \xi = -\dfrac{1}{2} \cdot \zeta + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \zeta', \end{cases}$$

Aus (5) folgt

$$(6) \qquad \begin{cases} \zeta = -\dfrac{1}{2}\left\{-\dfrac{1}{2}\xi + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\xi'\right\} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left\{-\dfrac{1}{2}\xi' + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\xi''\right\} \\ \quad = \dfrac{1}{4}\xi - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\xi' + \dfrac{3}{4}\xi'', \\ \xi = -\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{4} \cdot \xi - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\xi' + \dfrac{3}{4}\xi''\right\} \\ \qquad\qquad + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left\{\dfrac{1}{4}\xi' - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\xi'' + \dfrac{3}{4}\xi'''\right\} \end{cases}$$

d. h.

$$(7) \qquad 0 = -\frac{9}{8}\xi + \frac{3\sqrt{3}}{8}\xi' - \frac{9}{8}\xi'' + \frac{3\sqrt{3}}{8}\xi''',$$

oder

$$(8) \qquad 0 = -9\xi + 3\sqrt{3}\,\xi' - 9\xi'' + 3\sqrt{3}\,\xi'''.$$

Nun ist (8) zu schreiben in

$$(9) \qquad 0 = -9\,\Phi + 3\sqrt{3}\,\Phi',$$

wo

$$(10) \qquad \Phi = \xi + \xi'$$

ist, daraus ergibt sich

$$(11) \qquad \xi = \mathrm{A}\cos\sigma + \mathrm{B}\sin\sigma + \mathrm{C}e^{\sqrt{3}\sigma}$$

wo A, B, C beliebige Konstanten sind, da

$$(12) \qquad d\sigma^2 = (d\xi d\xi) = (d\eta d\eta) = (d\zeta d\zeta)$$

gilt und die Ableitungen nach $\sigma$ durch Striche bezeichnets werden.

Weiter können wir

$$(13) \qquad \begin{cases} {}_{(1)}\eta = \cos {}_{(1)}\alpha\, {}_{(1)}\xi + \sin {}_{(1)}\alpha\, {}_{(1)}\xi', \\ {}_{(2)}\eta = \cos {}_{(2)}\alpha\, {}_{(2)}\xi + \sin {}_{(2)}\, {}_{(2)}\xi, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ {}_{(1)}\xi = \cos {}_{(n)}\alpha\, {}_{(n)}\xi + \sin {}_{(n)}\, {}_{(n)}\xi' \end{cases}$$

anstatt (1) betrachten, wo

$$(14) \qquad {}_{(1)}\alpha + {}_{(2)}\alpha + \dots + {}_{(n)}\alpha = 2\pi$$

gilt.

Aus (13) folgt

$$(15) \qquad {}_{(1)}\alpha = {}_{(2)}\alpha = \dots = {}_{(n)}\alpha = 2\pi : n,$$

woraus wir $\xi$ bestimmen können.

(**E**) Wenn

$$(1)\qquad \begin{cases} \eta = \cos\alpha\cdot\xi + \sin\alpha\cdot\xi', \\ \xi = \cos\psi\cdot\eta + \sin\psi\cdot\eta' \end{cases}$$

gilt, so folgt

$$(2)\qquad \begin{cases} \eta = \cos\alpha\cdot\xi + \sin\alpha\cdot\xi', \\ \xi = \cos\alpha\cdot\eta - \sin\alpha\cdot\eta', \end{cases}$$

daraus ergibt sich

$$(3)\qquad \xi + \xi'' = 0$$

d. h. $\quad (4)\qquad \xi = \mathrm{A}\cos\sigma + \mathrm{B}\sin\sigma$

wo $\alpha+\psi=2\pi$ gilt und A, B zwei beliebige Konstanten sind.

Gilt

$$\eta \perp \eta',$$

so folgt hieraus

$$\{\cos\alpha\cdot\xi + \sin\alpha\cdot\xi'\} \perp \{\cos\alpha\cdot\xi' + \sin\alpha\cdot\xi'\}.$$

(**F**) Wir betrachten zwei Kreise

$$(1)\qquad \eta = \cos\alpha\cdot\xi + \sin\alpha\cdot\xi'$$

und

$$(2)\qquad \zeta = \cos\alpha\cdot\bar{\xi} + \sin\alpha\cdot\bar{\xi}'$$

in $\mathrm{R}_2$.

Wenn

$$(3)\qquad \eta = \zeta$$

gilt, so folgt aus (1) und (2)

$$(4)\qquad \cos\alpha\cdot\xi + \sin\alpha\cdot\xi' = \cos\alpha\cdot\bar{\xi} + \sin\alpha\cdot\bar{\xi}',$$

daraus erhalten wir

$$(5)\qquad \tan\alpha = \{\bar{\xi} - \xi\} : \{\xi' - \bar{\xi}'\}$$

d. h.

(6) $\alpha = \tan^{-1}[\{\bar{\xi} - \xi\} : \{\xi' - \bar{\xi}'\}]$.

Nach (6) können wir $\alpha$ aus den Kreisen $\xi$, $\bar{\xi}$, $\xi'$ und $\bar{\xi}'$ berechnen.

(G) Wir untersuchen zwei Kreise

(1) $\eta = \cos\alpha \cdot \xi + \sin\alpha \cdot \xi'$

und

(2) $\bar{\eta} = \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \xi'$.

Hieraus folgt

(3) $$\begin{cases} (\eta\bar{\eta}) = \sin\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \cos\alpha\,. \\ \qquad\;\; = 0\,. \end{cases}$$

Daraus sehen wir, dasz $\eta$ und $\bar{\eta}$ zueinander senkrecht sind.

Im allgemeinen sind

(4) $\eta = \cos\alpha \cdot \xi + \sin\alpha \cdot \xi'$

und

(5) $\bar{\eta} = \cos\{(2n+1)\frac{\pi}{2} + \alpha\} + \sin\{(2n+1)\frac{\pi}{2} + \alpha\}$

zueinander senkrecht, wo $n$ die ganzen Zahlen bedeutet.

## (6)

Benutzen wir die Zeichen in THOMSENs Arbeit,(1) so wird der Krümmungsradius $\rho$ von $\mathfrak{v}$ mit

(1) $\rho = (d\mathfrak{v}d\mathfrak{v}) : (d\xi d\xi)$

oder

(2) $\rho\,\{(\xi_\iota\xi_\iota)\}^{-1}$

gegeben.

(1) THOMSEN, G.: Über konforme Geo. II, Ahh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ., IV Bd., S. 120.

Aus (1) (2) sehen wir, dasz

$$(3) \qquad \tan\varphi = \frac{1}{3}\frac{d}{dt}\{(d\mathfrak{v}d\mathfrak{v}):(d\xi d\xi)\}$$

oder

$$(4) \qquad \tan\varphi = \frac{d}{dt}\{(\xi_t\xi_t)\}^{-1}$$

gilt, wo $\varphi$ die Deviation[2] von $\mathfrak{v}$ ist.

Wenn $\mathfrak{v}$ eine Eilinie (E) ist, so finden wir

$$(5) \qquad \begin{cases} \int_{-\pi}^{+\pi}\{(d\mathfrak{v}d\mathfrak{v}):(d\xi d\xi)\}\cos\sigma\, d\sigma = 0, \\ \int_{-\pi}^{+\pi}\{(d\mathfrak{v}d\mathfrak{v}):(d\xi d\xi)\}\sin\sigma\, d\sigma = 0 \end{cases}$$

als die Bedingung für die Geschlossenheit von $\mathfrak{v}$.

Ist $h$ die Stützfunktion von $\mathfrak{v}$, so gilt

$$(6) \qquad (d\mathfrak{v}d\mathfrak{v}):(d\xi d\xi) = h(\sigma) + h''(\sigma)$$

für E.

Ist L der Umfang von $\mathfrak{v}$, so folgt

$$(7) \qquad \mathrm{L} = \int_0^{2\pi} h\, d\sigma,$$

wenn $\mathfrak{v}$ eine Eilinie (E) ist.

Weiter finden wir den Flächeninhalt F wie folgendes

$$(8) \qquad 2\mathrm{F} = \int_0^{\pi}(h^2 - h'^2)\, d\sigma$$

für E.

Wenn

$$(9) \qquad (d\mathfrak{v}d\mathfrak{v}) = (d\xi d\xi)$$

oder

$$(10) \qquad (\xi_t\xi_t) = \text{const.}$$

für E gilt, so muss E ein Kreis sein.

Für E gilt

(2) MATUMURA, S.: Über einen affingeo. Satz und die Deviation ebener Kurven, Math. Journ. 36 (1933), p. 189.

(11) $\int_0^{L}(\xi_t\xi_t)\,dt = 2\pi$,

oder

(12) $\int_0^{L}\{\xi_t : \xi_\sigma\}\,dt = 2\pi$.

Wir können (30) in THOMSENs Arbeit[3] wie folt umformen

$$(13)\quad \begin{cases} \{\xi_t : (\xi_t\xi_t)\}_\sigma = -\xi + \bar{c}\mathfrak{v} + c\bar{\mathfrak{v}}, \\ \mathfrak{v}_\sigma = -c\,\{\xi_t : (\xi_t\xi_t)\}, \\ \bar{\mathfrak{v}} = -\bar{c}\,\{\xi_t : (\xi_t\xi_t)\}. \end{cases}$$

Aus

(14) $\eta = \cos\alpha\cdot\xi + \sin\alpha\cdot\xi'$

können wir sehen, dasz

(15) $\eta = d^2\eta\,/\,d\sigma^2 = 0$

gilt.

## ( 7 )

(**A**) Im folgenden möchten wir die Inversionsgeometrie untersuchen.

Ist $\xi$ eine Kugel und $\mathfrak{z}$ eine nicht auf ihm zusammenfallende Kugel im $R_3$, definieren wir mit

(1) $\mathfrak{y} = 2(\mathfrak{z}\xi)\xi - \mathfrak{z}$

die zu $\mathfrak{z}$ in bezug auf Kugel $\xi$ inverse Kugel.

Daher kommt, dasz

(2) $\mathfrak{y}^\alpha = 2(\mathfrak{z}^\alpha\xi)\xi - \mathfrak{z}^\alpha$, $[\alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}]$

den zum Kreis $\mathfrak{z}^\alpha$ in bezug auf die Kugel $\xi$ inversen Kreis darftellt.

Wir schliessen nun den Fall aus, dass die Matrix.

(3) $\|\mathfrak{z}^{\mathrm{I}}, \mathfrak{z}^{\mathrm{II}}, \tilde{\mathfrak{z}}^{\mathrm{I}}, \tilde{\mathfrak{z}}^{\mathrm{II}}\| = 0$

(3) THOMSEN, a. a. O., S. 127.

ist, wo eine lineare Beziehung der Form

$$(4) \qquad \sigma_\alpha \mathfrak{z}^\alpha = \tilde{\sigma}_\lambda \tilde{\bar{\mathfrak{z}}}^{k}$$

gilt, in der $\sigma_\alpha$, $\tilde{\sigma}_\lambda$ die skalaren Gröszen sind.

Die Bedeutung von (4) ist aber die, dass es eine Kugel

$$(5) \qquad \mathfrak{z} = \sigma_\alpha \mathfrak{z}^\alpha = \tilde{\sigma}_\lambda \tilde{\mathfrak{z}}^\lambda$$

gibt, auf der die beiden Kreise liegen.

Aus (2), (4) folgt

$$(6) \qquad \sigma_\alpha \mathfrak{y}^\alpha = \tilde{\sigma}_\lambda \tilde{\mathfrak{y}}^\lambda.$$

Die Bedeutung von (6) ist aber die, dass es eine Kugel

$$(7) \qquad \mathfrak{w} = \sigma_\alpha \mathfrak{y}^\alpha = \tilde{\sigma}_\lambda \tilde{\mathfrak{y}}^\lambda$$

gibt, auf der die beiden Kreise $\mathfrak{y}^\alpha$ und $\tilde{\mathfrak{y}}^\lambda$ liegen, wo $\mathfrak{y}^\alpha$, $\tilde{\mathfrak{y}}^\lambda$ die inversen Kreise in bezug auf die Kugel $\mathfrak{s}$ von $\mathfrak{z}^\alpha$ bzw. $\tilde{\mathfrak{z}}^\alpha$ sind.

Setzen wir nun

$$(8) \qquad \begin{cases} \mathfrak{y}^\alpha = 2(\mathfrak{x}^\alpha \mathfrak{s})\mathfrak{v} - \mathfrak{x}^\alpha \\ \tilde{\mathfrak{y}}^\lambda = 2(\tilde{\mathfrak{x}}^\lambda \mathfrak{s})\mathfrak{s} - \tilde{\mathfrak{x}}^\lambda, \end{cases}$$

so folgt

$$(9) \qquad (\mathfrak{y}^\alpha \tilde{\mathfrak{y}}^\lambda) = 4(\mathfrak{x}^\alpha \mathfrak{s})(\tilde{\mathfrak{x}}^\lambda \mathfrak{s}) - 2(\tilde{\mathfrak{x}}^\lambda \mathfrak{s})(\mathfrak{x}^\alpha \mathfrak{s}) - 2(\mathfrak{x}^\alpha \mathfrak{s})(\tilde{\mathfrak{x}}^\lambda \mathfrak{s}) + (\mathfrak{x}^\alpha \tilde{\mathfrak{x}}^\lambda)$$

oder

$$(10) \qquad (\mathfrak{y}^\alpha \tilde{\mathfrak{y}}^\lambda) = (\mathfrak{y}^\alpha \tilde{\mathfrak{x}}^\lambda).$$

Es gilt aber[1]

$$(11) \qquad (\mathfrak{x}^\alpha \tilde{\mathfrak{x}}^\lambda) = S^{\alpha\lambda},$$

daraus ergibt sich

$$(12) \qquad (\mathfrak{y}^\alpha \tilde{\mathfrak{y}}^\lambda) = S^{\alpha\lambda}.$$

Weiter gelten

$$(13) \qquad \begin{cases} \mathfrak{y}^\alpha = 2(\mathfrak{x}^\alpha \mathfrak{s})\mathfrak{s} - \mathfrak{x}^\alpha; \\ \mathfrak{y}^\beta = 2(\mathfrak{x}^\beta \mathfrak{s})\mathfrak{s} - \mathfrak{x}^\beta, \end{cases}$$

(1) BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie, III, S. 263.

so folgt

$$(14)\qquad (\mathfrak{y}^\alpha\mathfrak{y}^\beta) = 4(\mathfrak{x}^\alpha\xi)(\mathfrak{x}^\beta\xi) - 2(\mathfrak{x}^\beta\xi)(\mathfrak{x}^\alpha\xi) - 2(\mathfrak{x}^\alpha\xi)(\mathfrak{x}^\beta\xi) + (\mathfrak{x}^\alpha\mathfrak{x}^\beta)$$

oder

$$(15)\qquad (\mathfrak{y}^\alpha\mathfrak{y}^\beta) = (\mathfrak{x}^\alpha\mathfrak{x}^\beta) = A^{\alpha\beta}.$$

Also können wir sehen, dasz bei der inversen Transformation $S^{\alpha\lambda}$ und $A^{\alpha\beta}$ unveränderlich sind.

Von K und H gilt dasselbe, und K, H stehen in BLASCHKES Buch.(2)

(B) Wir betrachten

$$(1)\qquad \mathfrak{z} = \rho_\alpha\mathfrak{x}^\alpha + \bar{\rho}_\lambda\bar{\mathfrak{x}}^\lambda, \quad [\alpha,\ \lambda = \mathrm{I}, \mathrm{II}],$$

wo $\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{x}^{\mathrm{II}}$, $\bar{\mathfrak{x}}^{\mathrm{I}}$, $\bar{\mathfrak{x}}^{\mathrm{II}}$ die Kugeln in $R_3$ sind.

$\mathfrak{z}$ bezeichnet einen von den Kugelbüscheln in $R_3$

Aus (1) folgt

$$(2)\qquad (\mathfrak{z}\mathfrak{z}) = \rho_\alpha\rho_\beta A^{\alpha\beta} + \bar{\rho}_\lambda\bar{\rho}_\mu\bar{A}^{\lambda\mu} + 2\bar{\rho}_\alpha\bar{\rho}_\lambda S^{\alpha\lambda},$$

wo

$$(3)\qquad (\mathfrak{x}^\alpha\mathfrak{x}^\beta) = A^{\alpha\beta},\quad (\bar{\mathfrak{x}}^\lambda\bar{\mathfrak{x}}^\mu) = \bar{A}^{\lambda\mu},\quad (\mathfrak{x}^\alpha\bar{\mathfrak{x}}^\lambda) = S^{\alpha\lambda}$$

sind, woraus sich ergibt

$$(4)\qquad -\tfrac{1}{2} = \rho_\alpha\bar{\rho}_\lambda S^{\alpha\lambda}.$$

Wenn $\mathfrak{x}^\alpha$ und $\bar{\mathfrak{x}}^\lambda$ zwei Punkte sind, so folgt aus (2)

$$(5)\qquad 2\rho_\alpha\bar{\rho}_\lambda S^{\alpha\lambda} = 0,$$

wo $\mathfrak{z}$ ein Punkt ist.

Wenn $\mathfrak{x}^\alpha$ ein Punkt, $\bar{\mathfrak{x}}^\lambda$ ein Kugelbüschel ist, so folgt aus (2)

$$(6)\qquad 2\rho_\alpha\rho_\lambda S^{\alpha\lambda} = 0,$$

wo $\mathfrak{z}$ eine Kugel ist.

(C) Wir betrachten zwei Kreise $\mathfrak{K}$ und $\bar{\mathfrak{K}}$, die durch die beiden Kugeln $\mathfrak{x}^\alpha$ und $\bar{\mathfrak{x}}^\lambda$ $[\sigma=\mathrm{I}, \mathrm{II};\ \lambda=\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}]$ dargestellt sind.

Wir definieren

(2) BLASCHKE, a. a. O., S. 264.

$$(1) \qquad A^{\alpha\beta} = (\mathfrak{x}^{\alpha}\mathfrak{x}^{\beta}), \quad \bar{A}^{\lambda\mu} = (\bar{\mathfrak{x}}^{\lambda}\bar{\mathfrak{x}}^{\mu})$$

mit

$$(2) \qquad A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha}, \quad \bar{A}^{\lambda\mu} = \bar{A}^{\mu\lambda}$$

und setzen

$$(3) \qquad A = |A^{\alpha\beta}| > 0, \quad \bar{A} = |\bar{A}^{\lambda\mu}| > 0$$

voraus. Dann haven wir für $\mathfrak{K}$, $\bar{\mathfrak{K}}$ die Büscheltransformationnen

$$(4) \qquad \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha} = C^{\alpha}_{\beta}\mathfrak{x}^{\beta}, \quad \overset{*}{\bar{\mathfrak{x}}}{}^{\lambda} = \bar{C}^{\lambda}_{\mu}\bar{\mathfrak{x}}^{\mu}$$

zu berücksichtigen.

Die $\bar{C}^{\lambda}_{\mu}$ sind aber von den $C^{\alpha}_{\beta}$ völlig unabhängige Grössen.

Daher haben wir die Vektoren und Tensoren bezüglich der Büscheltransformationen von $\mathfrak{K}$ einerseits und von $\bar{\mathfrak{K}}$ anderseits zu unterscheiden.

In

$$(5) \qquad S^{\alpha\lambda} = (\mathfrak{x}^{\alpha}\bar{\mathfrak{x}}^{\lambda})$$

haben wir ein Grössensystem, bei dem beide Arten von Indizes vorkommen, nämlich einen gemischten Tensor, der sich nach

$$(6) \qquad \overset{*}{S}{}^{\alpha\lambda} = C^{\alpha}_{\beta}\bar{C}^{\lambda}_{\mu}S^{\beta\mu}$$

transformiert.

Jetzt sind unsre Untersuchungen sogut wie in meiner Arbeit[1].

## (8)

(**A**) Wir betrachten

$$(1) \qquad \mathfrak{x} = \xi - (\xi\eta)\xi .$$

Daraus folgt

(1) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (1), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. V, S. 99.

$$(2) \qquad (\mathfrak{x}+\eta)\,\xi = 1$$

oder

$$(3) \qquad \mathfrak{x} + \eta = \xi$$

wo $\mathfrak{x}$, $\xi$ und $\eta$ drei Kreise in $R_2$ sind.

Aus

$$(4) \qquad \mathfrak{x} = \xi + (\xi\eta)\,\xi$$

folgt

$$(5) \qquad \mathfrak{x} - \eta = \xi\,.$$

Wenn (3) und (5) gleichzeitig gelten, so haben wir.

$$(6) \qquad \mathfrak{x} = \xi\,.$$

Wenn $\xi$ und $\eta$ zueinander senkrecht in (1) sind, so folgt

$$(7) \qquad (\xi\eta) = 0$$

oder

$$(8) \qquad \mathfrak{x} = \xi\,.$$

gilt.

$$(9) \qquad (\xi\eta) = 0$$

in (4), so erhalten wir

$$(10) \qquad \mathfrak{x} = \xi\,.$$

(**B**) Wir betrachten

$$(1) \qquad \mathfrak{x} = \xi\,(\xi\eta) - \eta\,(\xi\eta)\,.$$

Daraus folgt

$$(2) \qquad (\mathfrak{x}\xi) = (\xi\eta) - (\xi\eta)^2$$

und

$$(3) \qquad (\eta\mathfrak{x}) = (\xi\eta)^2 - (\xi\eta)$$

Hieraus ergibt sich nun

$$(4) \qquad (\mathfrak{x}\xi) = -\,(\eta\mathfrak{x})$$

oder

(5) $\quad \xi + \eta = 0,$

wo $\xi$, $\eta$ und $\mathfrak{x}$ die Kreise in $R_2$ sind.

Aus $\mathfrak{x} = \xi(\xi\eta) + \eta(\xi\eta)$ anstatt (1) folgt

(6) $\quad \xi = \eta.$

(**C**) Wir untersuchen

(1) $\quad \mathfrak{x} = (\xi\eta)\xi + \eta,$

woraus wir erhalten

(2) $\quad (\mathfrak{x}\xi) = 2(\xi\eta)$

oder

(3) $\quad \mathfrak{x} = (\xi\eta)\xi - \eta$

wo $\xi$, $\eta$ und $\mathfrak{x}$ die Kreise in $R_2$ sind.

Aus

(3) $\quad \mathfrak{x} = (\xi\eta)\xi - \eta$

folgt

(4) $\quad (\mathfrak{x}\xi) = 0$

d. h. $\mathfrak{x}$ und $\xi$ sind zueinander senkrecht.

Sind $\xi$ und $\eta$ einander berühren in (1), so folgt

(5) $\quad \mathfrak{x}^2 = 1 - (\xi\eta)^2 = 0$

d. h. $\mathfrak{x}$ muss ein Punkt sein.

Aus (2) können wir sehen, dasz

$$(\mathfrak{x}\xi) = 0$$

d. h. der Punkt $\mathfrak{x}$ auf dem Kreis $\xi$ liegt.

Aus (2) köunen wir sehen, dasz der Punkt $\mathfrak{x}$ auf $\eta$ liegt.

$\mathfrak{x}$ ist nicht anders als der Berührungspunkt von zwei Kreisen $\xi$ und $\eta$.

(**D**) Wir forschen

(1) $\quad \mathfrak{x} = (\xi\mathfrak{z})\mathfrak{z} + (\xi\eta)\eta.$

Hieraus haben wir

$$(2)\qquad (\mathfrak{x}\mathfrak{z}) = (\xi\mathfrak{z}) + (\xi\eta)(\eta\mathfrak{z}),\quad (\mathfrak{x}\eta) = (\xi\mathfrak{z})(\mathfrak{z}\eta) + (\xi\eta).$$

Daraus sehen wir, dasz

$$(3)\qquad (\mathfrak{x}\mathfrak{z}) = (\mathfrak{x}\eta)$$

ist und wenn.

$$(4)\qquad (\eta\mathfrak{z}) = 1$$

gilt, so der **Satz** folgt:

*Wenn $\eta$ und $\mathfrak{z}$ einander berühren, so bestehe*

$$\cos\phi_1 = \cos\phi_2$$

*wo $\phi_1$ der Winkel zwischen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{z}$, $\phi_2$ der zwischen $\mathfrak{x}$ und $\eta$ sei.*

Weiter sehen wir aus (1), dasz

$$(5)\qquad 1 = (\xi\mathfrak{z})^2 + (\xi\eta)^2$$

gilt; es folgt also

$$(6)\qquad \mathfrak{x} = \cos\alpha\cdot\mathfrak{z} + \sin\alpha\cdot\eta,$$

wo $\alpha$ ein beliebiger Winkel ist.

Aus (2) ergibt sich

$$(7)\qquad \begin{cases}(\mathfrak{x}\mathfrak{z}) = \cos\alpha + \sin\alpha(\eta\mathfrak{z}),\\ (\mathfrak{x}\eta) = \cos\alpha(\mathfrak{z}\eta) + (\xi\eta)\end{cases}$$

d. h.

$$(8)\qquad \begin{cases}\cos\alpha_1 = \cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha_2,\\ \cos\alpha_3 = \cos\alpha\cos\alpha_2 + \cos\alpha_3\end{cases}$$

wo $\alpha$ der Winkel zwischen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{z}$, $\alpha_2$ der zwischen $\eta$ und $\mathfrak{z}$, $\alpha_3$ der zwischen $\xi$ und $\eta$ ist.

**(E)** Wir betrachten

$$(1)\qquad \mathfrak{x} = (\eta\mathfrak{z})\xi + (\xi\mathfrak{z})\eta + (\xi\eta)\mathfrak{z},$$

go folgt

$$(2)\qquad 1 = (\eta\mathfrak{z})(\xi\mathfrak{x}) + (\xi\mathfrak{z})(\eta\mathfrak{x}) + (\xi\eta)(\mathfrak{x}\mathfrak{z}),$$

wo $\xi$, $\eta$, $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{x}$ die Kreise in $R_2$ sind.

Aus (2) können wir sehen, dasz im reellen $\mathfrak{x}$ nicht zu $\xi$, $\eta$ und $\mathfrak{z}$ senkrecht ist.

Von

$$(3)\qquad \mathfrak{x} = (\eta\xi)\,\xi + (\mathfrak{z}\eta)\,\eta + (\xi\mathfrak{z})\,\mathfrak{z}$$

gilt dasselbe, denn aus (3) gilt

$$(4)\qquad 1 = (\eta\xi)(\xi\mathfrak{x}) + (\mathfrak{z}\eta)(\eta\mathfrak{x}) + (\xi\mathfrak{z})(\mathfrak{x}\mathfrak{z}).$$

**(F)** Wir untersuchen

$$(1)\qquad \mathfrak{x} = \xi + (\xi\eta)\,\eta\,,$$

wo $\xi$, $\eta$ und $\mathfrak{x}$ die Kreise in $R_2$ sind.

Aus (1) folgt

$$(2)\qquad (\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = 1 + 3(\xi\eta)^2 = 1\,,$$

$$(3)\qquad (\mathfrak{x}\xi) = 1 + (\xi\eta)^2 = 1\,,$$

$$(4)\qquad (\mathfrak{x}\eta) = 2(\xi\eta) = 0$$

wo $\xi$ und $\eta$ zueinander senkrecht sind,

Aus (2), (3), (4) sehen wir, dasz $\mathfrak{x}$ $\xi$ berührt und $\mathfrak{x}$ zu $\eta$ senkrecht ist

**(G)** Wir betrachten

$$(1)\qquad \mathfrak{y} = 2(\mathfrak{z}\xi)\,\xi + \xi\,,$$

so folgt

$$(2)\qquad (\mathfrak{y}\mathfrak{z}) = 2(\mathfrak{z}\xi)^2 + (\mathfrak{z}\xi)\,,$$

wo $\xi$, $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{y}$ die Kreise in $R_2$ sind.

Aus (2) sehen wir, dasz der Winkel zwischen $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ dem Winkel zwischen $\xi$ und $\mathfrak{z}$ gleich ist, wenn $\mathfrak{z}$ und $\xi$ zneinander senkrecht sind.

Aus (1) folgt

$$(3)\qquad (\mathfrak{y}\xi) = 2(\mathfrak{z}\xi) + 1\,,$$

d. h. $\cos\varphi_1 = 2\cos\varphi_2 + 1$,

wo $\varphi_1$ der Winkel zwischen $\mathfrak{y}$ und $\xi$, $\varphi_2$ der zwischen $\mathfrak{z}$ und $\xi$ ist.

Aus (1) erhalten wir

$$(4) \qquad (\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = 2(\mathfrak{z}\xi)(\mathfrak{x}\xi) + (\mathfrak{x}\xi),$$

wo $\mathfrak{x}$ ein Kreis in $R_2$ ist.

Aus (4) sehen wir, dasz $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ zueinander senkrecht sind, wenn $\mathfrak{x}$ und $\xi$ zueinander senkrecht sind.

(**H**) Wir untersuchen

$$(1) \qquad \eta = \xi - (\xi\eta)\eta,$$

wo $\eta$ ein Punkt, $\xi$ ein Kreis in $R_2$ ist. Aus (1) folgt

$$(2) \qquad (\eta\eta) = (\xi\eta) - (\xi\eta) = 0$$

und

$$(3) \qquad (\xi\eta) = 1 - (\xi\eta)^2,$$

so sehen wir, dasz $\eta$ nicht auf $\xi$ liegen kann.

Es seien $\xi$, $\eta$ zwei Kreise in $R_2$, so folgt aus

$$(4) \qquad \eta = \xi + (\xi\eta)\eta,$$

$$(5) \qquad (\eta\eta) = 2(\xi\eta)$$

und

$$(6) \qquad (\xi\eta) = 1 + (\xi\eta)^2.$$

Aus (6) sehen wir, dasz $\xi$ und $\eta$ zueinander nicht senkrecht sein oder sich nicht berüren können.

Betrachten wir (7) $2\eta = \xi + (\xi\eta)\eta$ anstatt (4), so folgt

$$(8) \qquad 2(\xi\eta) = 1 + (\xi\eta)^2$$

d. h.

$$(9) \qquad (\xi\eta) = 1,$$

Wir können also sagen, dasz $\xi$ und $\eta$ einander berühren.

(**I**) Der Berührungspunkt $\mathfrak{x}$ wird dureh

$$(1) \qquad \mathfrak{x} = \xi - (\xi\eta)\,\eta$$

gegeben, wo $\xi$, $\eta$ die Kreise in $R_2$ sind, die sich berühren, d. h. $(\xi\eta)^2 = 1$ ist.

Ist $\xi$ ein Kreis und $\eta$ ein nicht auf ihm gelegener Kreis, so ist

$$(2) \qquad \mathfrak{y} = 2\,(\eta\xi)\,\xi - \eta$$

der zu $\eta$ in bezug auf den Kreis $\xi$ inverse Kreis.

Aus (1), (2) folgt

$$(3) \qquad \begin{cases} (\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = (\eta\xi) - (\xi\eta) - 2\,(\eta\xi)^3 + (\xi\eta) \\ \qquad\;\; = 2\,(\eta\xi) - 2\,(\eta\xi) \\ \qquad\;\; = 0\,, \end{cases}$$

daraus sehen wir, dasz $\mathfrak{x}$ auf dem Kreis $\mathfrak{y}$ liegt.

Weiter ist

$$(4) \qquad \begin{cases} (\mathfrak{y}\eta) = 2\,(\eta\xi)^2 - 1 \\ \qquad\;\; = 1\,, \end{cases}$$

da $\mathfrak{y}$ und $\eta$ berühren sich.

(J) Es seien zwei Kugelbüschel $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ mit dualen Vektoren

$$(1) \qquad \mathfrak{p} = \mathfrak{x} + \varepsilon\mathfrak{y}\,,$$

$$(2) \qquad \mathfrak{q} = \xi + \varepsilon\eta$$

gegeben, wo $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\xi$ und $\eta$ die Kugeln in $R_n$ bedeuten.

Aus (1), (2) ergibt sich

$$(3) \qquad \begin{cases} (\mathfrak{p}\mathfrak{q}) = (\mathfrak{x} + \varepsilon\mathfrak{y},\, \xi + \varepsilon\eta) \\ \qquad\;\; = (\mathfrak{x}\xi) + \varepsilon\,\{(\mathfrak{x}\eta) + (\mathfrak{y}\xi)\} = 1\,, \end{cases}$$

wenn der Winkel zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ Null gleich ist.

Daraus sehen wir, dasz

$$(4) \qquad (\mathfrak{x}\xi) = 1\,,$$

$$(5) \qquad (\eta\mathfrak{x}) + (\mathfrak{y}\xi) = 0\,,$$

Daraus ergibt sich

$$(8) \qquad \cos\phi_1 = \cos\alpha \cdot \cos\phi_2 + \sin\alpha\,,$$

$$(9) \qquad \cos\phi_3 = \cos\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\phi_2\,,$$

wo $\phi_1$ der Winkel zwischen $\mathfrak{z}$ und $\xi$, $\phi_2$ der zwischen $\mathfrak{x}$ und $\xi$, $\phi_3$ der zwischen $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{x}$ ist.

Aus (4) gilt

$$(10) \qquad \cos\varphi_1 = \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 + \cos\varphi_4 \cos\varphi_2$$

wo $\varphi_1$ der Winkel zwischen $\mathfrak{z}$ und $\eta$, $\varphi_2$ der zwischen $\xi$ und $\eta$, $\varphi_3$ der zwischen $\mathfrak{x}$ und $\eta$, $\varphi_4$ der zwischen $\mathfrak{x}$ unu $\mathfrak{y}$ ist.

Nehmen wir

$$(11) \qquad \mathfrak{z} = (\xi\eta)\,\zeta + (\eta\zeta)\,\xi + (\xi\zeta)\,\eta$$

anstatt (1), so folgt

$$(12) \qquad \begin{cases} (\mathfrak{z}\zeta) = (\xi\eta) + 2\,(\eta\zeta)\,(\xi\zeta)\,, \\ (\mathfrak{z}\xi) = 2\,(\xi\eta)\,(\zeta\xi) + (\eta\zeta)\,. \\ (\mathfrak{z}\eta) = 2\,(\xi\eta)\,(\zeta\eta) + (\xi\zeta)\,, \\ (\mathfrak{z}\mathfrak{z}) = (\xi\eta)\,(\mathfrak{z}\zeta) + (\eta\zeta)\,(\mathfrak{z}\xi) + (\xi\zeta)\,(\mathfrak{z}\eta)\,, \end{cases}$$

wo $\mathfrak{z}$, $\zeta$, $\xi$, $\eta$ die Kreise in $R_2$ sind.

Von (12) gilt dasselbe.

(M) $\xi$, $\eta$ seien zwei Kreise in $R_2$. Der Berührungspunkt $\mathfrak{x}$ von $\xi$, $\eta$ wird mit

$$(1) \qquad \mathfrak{x} = \xi\,(\xi\eta) - \eta\,, \quad (\xi\eta)^2 = 1$$

gegeben, denn aus (1) folgt

$$(2) \qquad (\mathfrak{x}\xi) = (\xi\eta) - (\xi\eta) = 0\,,$$

$$(3) \qquad (\mathfrak{x}\eta) = (\xi\eta)^2 - 1 = 0\,,$$

$$(4) \qquad (\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = 1 - (\xi\eta)^2 = 0\,.$$

THOMSEN[1] betrachtet

(1) THOMSEN, G.: Über konforme Geo. II, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ., Bd. IV, S. 122.

( 5 ) $\quad \mathfrak{x} = \xi - (\xi\eta)\,\eta$

anstatt (1).

(N) Wir betrachten

( 1 ) $\quad \mathfrak{x} = \{(\xi\eta) - 1\}\,\{\xi - \eta\}$

oder

( 2 ) $\quad \xi = (\xi\eta)\,\{\xi - \eta\} - \{\xi - \eta\},$

so folgt aus (1)

( 3 ) $\quad (\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = 8\,\{1 - (\xi\eta\}\,,$

( 4 ) $\quad (\xi\mathfrak{x}) = -\,4\,\{1 - (\xi\eta)\},$

( 5 ) $\quad (\xi\eta) = 2\,\{1 - (\xi\eta)\},$

wo $\xi$, $\eta$ die Kreise in $R_2$ sind.

Wenn $(\xi\xi) = 1$ ist, so folgt aus (3), (4) und (5)

( 6 ) $\quad (\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = 0\,, \quad (\xi\mathfrak{x}) = 0\,, \quad (\xi\eta) = 0\,.$

Daraus sehen wir, dasz $\mathfrak{x}$ der Berührungspunkt von $\xi$ und $\eta$ ist.

Wenn $(\xi\eta) = -\,1$ ist, so folgt aus (3), (4) und (5)

( 7 ) $\quad \begin{cases} (\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = 16, \\ (\xi\mathfrak{x}) = -\,8, \\ (\xi\eta) = 4\,. \end{cases}$

Daraus ist zu sehen, dasz $\mathfrak{x}$ kein Punkt ist und $\xi$, $\eta$ sich nicht berühren.

(O) $\xi$ und $\mathfrak{z}$ seien zwei Kreise in $R_2$, so folgt

( 1 ) $\quad (\mathfrak{y}\mathfrak{y}) = 5 - 4\,(\xi\mathfrak{z}) = 1\,,$

( 2 ) $\quad (\mathfrak{y}\xi) = 1\,,$

( 3 ) $\quad (\mathfrak{y}\mathfrak{z}) = 1\,;$

wir wissen, dasz $\mathfrak{y}$ ein Kreis in $R_2$ ist und $\mathfrak{y}$, $\xi$ und $\mathfrak{z}$ berührt.

## ( 9 )

Wir wollen THOMSENs Zeichen[1] benutzen und die Ebenkurven untersuchen.

Aus dem wholbekannten Satz sehen, dasz wir, wenn $(\xi_t \xi_t)$ als die Funktion von $t$ gegeben, die Kurve eindeutig auszer der Bewegung bestimmen.

Für die Ebenekurve gilt immer

$$(1) \qquad \{\cos \textstyle\int (\xi_t \xi_t)\, dt\}^2 + \{\sin \int (\xi_t \xi_t)\, dt\}^2 = 1\,.$$

$$(2) \qquad t + \{(\xi_t \xi_t)\}^{-2} = 16\, b^2$$

ist die natürliche Gleichung von Zokloide.

Als die Evolvente des Kreises können wir

$$(3) \qquad 2\, at = b^2 - \{(\xi_t \xi_t)\}^{-}$$

erhalten.[2]

## ( 10 )

(A) Im folgenden können wir LIES Geometrie im Raume untersuchen.

$$(1) \qquad \mathfrak{y} = \rho_\alpha \mathfrak{x}^\alpha + \bar{\rho}_\lambda \bar{\mathfrak{x}}^\lambda,$$

$$(2) \qquad \bar{\mathfrak{y}} = \rho_\alpha \mathfrak{x}^\alpha - \bar{\rho}_\lambda \bar{\mathfrak{x}}^\lambda, \quad [\alpha, \lambda = \mathrm{I}, \mathrm{II}]$$

bezeichnen die Kugeln, wo $\mathfrak{x}^\alpha$, $\bar{\mathfrak{x}}^\lambda$ die Kugeln sind.

Da gelten

$$(3) \qquad A^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta = 0\,,$$

$$(4) \qquad \bar{A}^{\lambda\mu} \bar{\rho}_\lambda \bar{\rho}_\mu = 0\,.$$

Wenn die Kugelbüschel $\rho_\alpha \mathfrak{x}^\alpha$ und $\bar{\rho}_\lambda \bar{\mathfrak{x}}^\lambda$ zueinander senkrecht sind, so haben wir

---

(1) THOMSEN, G.: Über konforme Geo. II., Aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ, IV, S. 126.

(2) KUBOTA, T.: Elementary differential geometry, Iwanami, p. 29.

$$(5) \qquad \rho_\alpha \bar{\rho}_\lambda (\mathfrak{x}^\alpha \bar{\mathfrak{x}}^\lambda) = 0.$$

Aus (1), (3), (4) und (5) folgt

$$(6) \qquad (\mathfrak{y}\mathfrak{y}) = 0.$$

Wir sehen daraus, dasz $\mathfrak{y}$ eine Kugel bezeichnet. Von (2) gilt das Gleiche, d. h. $\bar{\mathfrak{y}}$ in (2) bezeichnet eine Kugel.

Aus (1), (2) folgt

$$(7) \qquad (\mathfrak{y}\bar{\mathfrak{y}}) = \rho_\beta \rho_\beta A^{\alpha\beta} - \bar{\rho}_\lambda \bar{\rho}_\mu \bar{A}^{\lambda\mu} = 0,$$

d. h. $\mathfrak{y}$ und $\bar{\mathfrak{y}}$ sind zueinander senkrecht.

Wenn die Matrix

$$(8) \qquad \| \mathfrak{x}^{\mathrm{I}}, \mathfrak{x}^{\mathrm{I}}, \bar{\mathfrak{x}}^{\mathrm{I}}, \bar{\mathfrak{x}}^{\mathrm{II}} \| \equiv 0$$

ist, so gilt eine lineare Beziehung

$$(9) \qquad \sigma_\alpha \mathfrak{x}^\alpha = \bar{\sigma}_\lambda \bar{\mathfrak{x}}^\lambda.$$

Die Bedeutung von (9) ist die, dass eine Kugel

$$(10) \qquad \mathfrak{x} = \sigma_\alpha \mathfrak{x}^\alpha = \bar{\sigma}_\lambda \bar{\mathfrak{x}}^\lambda$$

ergibt, auf der beide Kreise liegen.

Wir betrachten

$$(11) \qquad \mathfrak{x} = \xi - (\xi\eta)\,\eta,$$

wo $\xi$, $\eta$ zwei zueinander senkrechte Kugeln sind.

Aus (11) folgt

$$(12) \qquad (\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = (\xi\xi) + (\xi\eta)(\eta\eta) - 2(\xi\eta)^2.$$

Daraus sehen wir, dasz

$$(13) \qquad (\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = -2,$$

wo

$$(14) \qquad (\xi\xi) = 0, \quad (\eta\eta) = 0, \quad (\xi\eta)^2 = 1$$

Aus (13) ist zu sehen, dasz $\mathfrak{x}$ nicht eine Kugel ist.

Wir betrachten

$$(15) \qquad \mathfrak{y} = 2(\mathfrak{z}\xi)\,\xi - \mathfrak{z},$$

im komplexen Gebiete.[1]

Zwei konsekutive Kugeln des Systemes schliessen den Winkel $d\sigma$:

$$(2)\qquad d\sigma^2 = (d\xi d\xi), \quad d\sigma^2 = (d\mathfrak{x}d\mathfrak{x})$$

ein.

$n+1$ konsekutive Kugeln des Systems (1) bestimmen die gemeinsamen Orthogonalkugeln:

$$(3)\qquad \begin{cases} \eta = \mathrm{P}\left\| \xi, \ \dfrac{d\xi}{d\sigma}, \ \dfrac{d^2\xi}{d\sigma^2}, \ \dots, \ \dfrac{d^n\xi}{d\sigma^n} \right\|, \\ \mathfrak{y} = \mathrm{Q}\left\| \mathfrak{x}, \ \dfrac{d\mathfrak{x}}{d\sigma}, \ \dfrac{d^2\mathfrak{x}}{d\sigma^2}, \ \dots, \ \dfrac{d^n\mathfrak{x}}{d\sigma^n} \right\|, \\ (\eta\eta) = 1. \quad (\mathfrak{y}\mathfrak{y}) = 1. \end{cases}$$

Die Kugeln (1) beschreiben im allgemeinen zwei Enveloppenkurvenpaare

$$(4)\qquad \begin{cases} \mathfrak{u} = \mathfrak{u}(\sigma), \quad \bar{\mathfrak{u}} = \bar{\mathfrak{u}}(\sigma); \\ \mathfrak{v} = \mathfrak{v}(\sigma), \quad \bar{\mathfrak{v}} = \bar{\mathfrak{v}}(\sigma). \end{cases}$$

Es gelten die Beziehungen:

$$(5)\qquad \begin{cases} \mu\mathfrak{u} = \dfrac{d\eta}{ds} + i\eta, \qquad (\mathfrak{u}\mathfrak{u}) = 0, \\ \bar{\mu}\bar{\mathfrak{u}} = \dfrac{d\eta}{ds} - i\eta, \qquad (\bar{\mathfrak{u}}\bar{\mathfrak{u}}) = 0, \\ \nu\mathfrak{v} = \dfrac{d\mathfrak{y}}{ds} + i\mathfrak{y}, \qquad (\mathfrak{v}\mathfrak{v}) = 0, \\ \bar{\nu}\bar{\mathfrak{v}} = \dfrac{d\mathfrak{v}}{ds} - i\mathfrak{y}, \qquad (\bar{\mathfrak{v}}\bar{\mathfrak{v}}) = 0, \end{cases}$$

wo $i = \sqrt{-1}$, dann $\mu, \bar{\mu}, \nu, \bar{\nu}$ beliebige Funktionen von $\sigma$ und ferner $ds$ das durch die Kugeln $\eta$, $\mathfrak{y}$ beschriebene Winkelelement ist.

Aus (5) folgt

(1) MIKAMI, M.: A generalisation of SERET-FRENET formulae in an n-dimensional space, Tensor, The Tensor Society in Japan, Sapporo, No. 1, March 1938.

$$(6) \qquad \mu\bar{\mu}(\mathfrak{u}\mathfrak{v}) = \left\{\left(\frac{d\eta}{ds}\frac{d\mathfrak{y}}{ds}\right) - (\eta\mathfrak{y})\right\} + i\left\{\left(\mathfrak{y}\frac{d\eta}{ds}\right) + \left(\eta\frac{d\mathfrak{y}}{ds}\right)\right\}.$$

Wenn $\mathfrak{u}$-Kurve und $\bar{\mathfrak{u}}$-Kurve zueinander sennkrecht sind, so folgt

$$(7) \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{d\eta}{ds}\dfrac{d\mathfrak{y}}{ds}\right) = (\eta\mathfrak{y}), \\ \left(\mathfrak{y}\dfrac{d\mathfrak{y}}{ds}\right) + \left(\eta\dfrac{d\mathfrak{y}}{ds}\right) = 0. \end{cases}$$

Aus (7) ergibt sich

$$(8) \qquad \left(\frac{d\eta}{ds}\frac{d\mathfrak{y}}{ds}\right) = (\eta\mathfrak{y}) = \text{const.},$$

d. h. $\mathfrak{y}$ und $\eta$ müssen zueinander senkrecht sein.

Aus (8) folgt

$$(9) \qquad \left(\frac{d^2\eta}{ds^2}\mathfrak{y}\right) + \left(\eta\frac{d^2\mathfrak{y}}{ds^2}\right) = \text{const.}$$

Von

$$(10) \qquad \bar{\mu}\bar{\nu}\,(\bar{\mathfrak{u}}\mathfrak{v} = = \left\{\left(\frac{d\eta}{ds}\frac{d\mathfrak{y}}{ds}\right) - (\eta\mathfrak{y})\right\}$$
$$- i\left\{\left(\mathfrak{y}\frac{d\eta}{ds}\right) + \left(\eta\frac{d\eta}{ds}\right)\right\} = 0$$

gilt das Gleiche.

Aus (5) folgt

$$(11) \qquad (\mu\bar{\mu})(\mathfrak{u}\bar{\mathfrak{u}}) = \left(\frac{d\eta}{ds}\frac{d\mathfrak{h}}{ds}\right) + (\eta\eta) = \text{const.}.$$

d. h. (12) $\quad (\mathfrak{u}\bar{\mathfrak{u}}) = \text{const.} : \mu\bar{\mu}.$

Aus (12) sehen wir,

$$\mu\bar{\mu} = \text{const.}$$

bedeute, dasz die Länge zwischen $\mathfrak{u}$ und $\bar{\mathfrak{u}}$ konstant sei.

Von.

$$(13) \qquad \nu\bar{\nu}(\mathfrak{v}\bar{\mathfrak{v}}) = \left(\frac{d\mathfrak{y}}{ds}\,\frac{d\mathfrak{y}}{ds}\right) + (\mathfrak{y}\mathfrak{y})$$

gilt dasselbe.

Aus

$$(14) \qquad \mu\bar{\nu}(\mathfrak{u}\bar{\mathfrak{v}}) = \left(\frac{d\eta}{ds}\,\frac{d\mathfrak{y}}{ds}\right) + (\eta\mathfrak{y}) + i\left\{\left(\eta\,\frac{d\mathfrak{y}}{ds}\right) - \left(\mathfrak{y}\,\frac{d\eta}{ds}\right)\right\}$$

kommt zustande

$$(15) \qquad \left(\frac{d\eta}{ds}\,\frac{d\eta}{ds}\right) + (\eta\mathfrak{y}) = 0\,,$$

$$(16) \qquad \left(\eta\,\frac{d\mathfrak{y}}{ds}\right) = \left(\mathfrak{y}\,\frac{d\eta}{ds}\right).$$

Aus (16) folgt

$$(17) \qquad \left(\eta\,\frac{d^2\mathfrak{y}}{ds^2}\right) = \left(\mathfrak{y}\,\frac{d^2\eta}{ds^2}\right).$$

Aus (15) haben wir

$$(18) \qquad \left(\frac{d^2\eta}{ds^2}\,\frac{d\mathfrak{y}}{ds}\right) + \left(\frac{d\eta}{ds}\,\frac{d^2\mathfrak{y}}{ds^2}\right) + \left(\frac{d\eta}{ds}\,\mathfrak{y}\right) + \left(\eta\,\frac{d\mathfrak{y}}{ds}\right) = 0\,.$$

so folgt aus (17) und (16)

$$(19) \qquad \left(\frac{d\mathfrak{y}}{ds}\,\frac{d^2\eta}{ds^2}\right) + \left(\mathfrak{y}\,\frac{d\eta}{ds}\right) = 0\,,$$

wenn

$$(20) \qquad \left(\eta\,\frac{d^3\mathfrak{y}}{ds^3}\right) = \left(\mathfrak{y}\,\frac{d^3\eta}{ds^3}\right).$$

# BEITRÄGE ZUR GEOMETRIE DER KREISE UND KUGELN (XXVIII)

Sôzi MATUMURA

(Accepted for publication, October, 14, 1938.)

Im nachstehenden erwähnen wir einige Sätze über die Kreise und Kugeln.

## ( 1 )

Nachstehend machen wir

$$(\theta_t\theta_t),\quad (\theta_t\theta_\tau),\quad (\theta_\tau\theta_\tau)$$

klar.[1]

(**A**) Die Gleichungen der Minimallinien sind

$$(1)\qquad (\theta_t\theta_t)\,dt^2 + 2\,(\theta_t\theta_\tau)\,dtd\tau + (\theta_\tau\theta_\tau)\,d\tau^2 = 0\,,\ (\theta_\tau\theta_\tau) = 1\,.$$

Wenn

$$(2)\qquad (\theta_t\theta_t) = (\theta_t\theta_\tau) = 1$$

(1) gilt, so folgt

$$(3)\qquad t + \tau = \text{const.}.$$

(3) sind die Gleichungen unserer Minimallinien.

(**B**) Wenn

$$(4)\qquad (\theta_t\theta_t) = (\theta_t\theta_\tau) = 0$$

in (1) gilt, so folgt aus (1)

$$(5)\qquad \tau = \text{const.}.$$

[Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ. Formosa, Japan, Vol. XXI No. 7, November, 1938.]

(1) NAKAZIMA, S.: Kugelgeo. von MÖBIUS, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ. Formosa, Japan, Vol. 2, No. 2, S. 36.

(5) sind die Gleichungen unserer Minimallinien.

Wenn

$$(6) \qquad (\theta_t \theta_t) = 0$$

ist, so folgt aus (1)

$$(7) \qquad \tau = \text{const.}, \quad 2(\theta_t \theta_\tau)\, dt + d\tau = 0 .$$

(7) sind die Gleichungen unserer Minimallinien.

(C) Auf einer Kreisfläche K nehmen wir zwei Kurven $c$ und $c'$ an, die nicht geodätisch parallel sind, und wählen als Parameterlinien $t$, $\tau$ die geodätischen Parallelen zu $c$ und $c'$, als Parameter $t$ die geodätiche Entfernung von der Grundkurve $c$ und als Parameter $\tau$ diejenige von der Grundkurve $c'$.

Aus der wohlbekannten Formel[1] folgt

$$(\theta_t \theta_t) = (\theta_\tau \theta_\tau) = 1, \quad (\theta_t \theta_\tau) = 0 .$$

Wird mit $\omega$ der Winkel der Parameterlinien bezeichnet, so ist

$$\omega = \pi/2 ,$$

folglich

$$ds^2 = dt^2 + d\tau^2,$$

wo $ds^2$ der Ausdruck für das Quadrat des Linienelements ist.

Führen wir nun als neue Parameterlinien die Kurven

$$t + \tau = \text{const.}, \quad t - \tau = \text{const.}$$

ein und setzen noch

$$t + \tau = 2\alpha , \quad t - \tau = 2\beta ,$$

so erhalten wir

$$ds^2 = 2\, \{d\alpha^2 + d\beta^2\}.$$

(D) Zwei beliebige Kurven $t = t(\alpha)$, $\tau = \tau(\alpha)$ und $t_1 = t_1(\alpha)$, $\tau_1 = \tau_1(\alpha)$ der Kreisfläche K bilden miteinander einen Winkel $\omega$, für den wir haben

(1) LUKAT, M.: BIANCHIs Differentialgeo. (1910), S. 162.

(1)

$$\sin\omega = \frac{\sqrt{(\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau)-(\theta_t\theta_\tau)^2}\cdot(t'\tau_1'+t_1'\tau')}{\sqrt{(\theta_t\theta_t)t'^2+2(\theta_t\theta_\tau)t'\tau'+(\theta_\tau\theta_\tau)\tau'^2}\sqrt{(\theta_t\theta_t)t_1'^2+2(\theta_t\theta_\tau)t_1'\tau_1'+(\theta_\tau\theta_\tau)\tau_1'^2}}.$$

Aus (1) können wir $\cos\omega$, $\tan\omega$, $\sec\omega$, u. s. w. berechnen.

Die geodätische Linie des Verfolgten und die Richtungslinie auf K mögen miteinander den Winkel $\omega$ einschliessen.

Dann muss sein[1]

$$\cos\omega = \frac{(\theta_t\theta_t)+(\theta_t\theta_\tau)\left(\frac{d\tau}{dt}+\frac{d\tau_1}{dt_1}\right)+(\theta_\tau\theta_\tau)\frac{d\tau_1}{dt}\frac{d\tau_1}{dt_1}}{\sqrt{(\theta_t\theta_t)+2(\theta_t\theta_\tau)\frac{d\tau}{dt}+(\theta_\tau\theta_\tau)\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2}\sqrt{(\theta_t\theta_t)+2(\theta_t\theta_\tau)\frac{d\tau_1}{dt_1}+(\theta_\tau\theta_\tau)\left(\frac{d\tau_1}{dt_1}\right)^2}}.$$

(**E**) Bei der geometrischen Formulierung der BÄCKLUNDschen Transformation spielen die Eigenschaften der Haupttangentenkurven einer pseudospherischen Fläche eine wesentliche Rolle. Nach DINI und ENNEPER können wir wissen, dasz das Quadrat des Linienelmentes einer solchen Kreisfläche (K) für die Haupttangentenkurven als Parameterlinien die Form erhält

$$ds^2 = dt^2 + 2(\theta_t\theta_\tau)\,dt\,d\tau + d\tau^2,$$

wo

$$\partial^2/\partial t\partial\tau \cos^{-1}\{(\theta_t\theta_\tau)\} = \{1-(\theta_t\theta_\tau)^2\}^{\frac{1}{2}}$$

genügt.[2]

Bezeichnen wir mit $\vartheta$ und $\vartheta_1$ die Winkel von $c$ bzw. $c'$ mit der Kurve $\tau$, so ist

$$\sin\vartheta = \sqrt{1-(\theta_t\theta_\tau)^2}\,\frac{\partial\tau}{\partial\alpha},\quad \cos\vartheta = \frac{\partial t}{\partial\alpha}+(\theta_t\theta_\tau)\frac{\partial\tau}{\partial\alpha},$$

$$\sin\vartheta_1 = \sqrt{1-(\theta_t\theta_\tau)^2}\,\frac{\partial\tau}{\partial\beta},\quad \cos\vartheta = \frac{\partial t}{\partial\beta}+(\theta_t\theta_\tau)\frac{\partial\tau}{\partial\beta},$$

folglich

$$\sin\Omega = \sin(\vartheta_1-\vartheta) = \sqrt{1-(\theta_t\theta_\tau)^2}\left(\frac{\partial t}{\partial\alpha}\frac{\partial\tau}{\partial\beta}-\frac{\partial t}{\partial\beta}\frac{\partial\tau}{\partial\alpha}\right),$$

w. z. b. w.,

---

(1) LETZ, E.: Die Verfolgungskurve des Kehlkreises auf den Rotationsflächen konstanter Krümmung, Inaugual-Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde der Hohen Philosophischen Fakultät der vereinigten Friedrichs-Univ. Halle-Wittenberg (1912), S. 16.

(2) Vergl. Encyklopädie der Math. Wissenschaften, III. 3, S. 342.

wobei $c$, $c'$, $\alpha$, $\beta$ in BIANCHIS Buch[1] stehen.

(F) Nach HAYASI[2] können wir wissen, dasz in dem Falle der Kreisfläche K aus der Bedingung

$$T_t = T_\tau$$

ergibt sich, dasz die Gröszen

$$D_{11}/(\theta_t\theta_t), \quad D_{12}/(\theta_t\theta_\tau), \quad D_{22}/1$$

eine arithmetische Progression bilden, wo $T_\tau^{-1}$ bzw. $T_t^{-1}$ die Torsionen

$$t = \text{const. und } \tau = \text{const},$$

$$D_{11}dt^2 + 2\,D_{12}dtd\tau + D_{22}d\tau^2 = 0$$

die asymptotischen Linien auf K sind.

Uuter „Torsionskurven" einer Kreisfläche verstehen wir die Kurven, auf denen die geodätische Torsion ein Extremum besitzt. Ihre Gleichung ist

$$(\theta_t\theta_t)\,dt^2 - (\theta_\tau\theta_\tau)\,d\tau^2 = 2\,,$$

wenn die Krümmungslinien als Parameterkurven gewählt werden.[3]

(G) Im folgenden machen wir die Geometrie auf K klar.

Wenn die Krümmungslinien parametrig sind

$$((\theta_t\theta_\tau) = D_{12} = 0)\,,$$

so nimmt die Differentialgleichung der Tortionslinien die folgende Gestalt an:

$$(\theta_t\theta_\tau)\,dt^2 - (\theta_\tau\theta_\tau)\,d\tau^2 = 0\,, \quad (\theta_\tau\theta_\tau) = 1.$$

Wenn die Torsionslinien parametrig sind, so gelten

$$\begin{cases} 2\,D_{11}\,\theta\lambda - (\theta_t\theta_t)\,\{(\theta_t\theta_t)\,D_{22} + D_{11} - 2\,(\theta_t\theta_\tau)\,D_{12}\} = 0\,, \\ 2\,D_{22}\,\theta\lambda - \{(\theta_t\theta_t)\,D_{22} + D_{11} - 2\,(\theta_t\theta_\tau)\,D_{12}\} = 0\,, \\ \theta^2 = (\theta_t\theta_t) - (\theta_t\theta_\tau)^2. \end{cases}$$

(1) LUKAT, M.: BIANCHIS Differentialgeometrie, Leipzig und Berlin, (1910), S. 215.

(2) HAYASI, T.: On the Usual Parametric Curves on a Surface, Tôhoku Sci. Reports, 5 (1916).

Nun sind die Torsionslinien orthogonal:

$$(\theta_t\theta_\tau)=0\,,$$

wobei $\lambda$ in meiner Arbeit[1] steht.

Folglich gehen die beiden obigen Gleichungen über in

$$\begin{cases}(\theta_t\theta_t)\,\{\mathrm{D}_{11}-(\theta_t\theta_t)\,\mathrm{D}_{22}\}=0\,,\\ \{\mathrm{D}_{11}-(\theta_t\theta_t)\,\mathrm{D}_{22}\}=0\,.\end{cases}$$

Nun ist[2]

$$(\theta_t\theta_t)\neq 0\neq 1\,.$$

Daher musz

$$\mathrm{D}_{11}-(\theta_t\theta_t)\,\mathrm{D}_{22}=0$$

sein. Also gilt der

**Satz**: *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dasz die Torsionslinien parametrig sind, besteht darin, dasz*

$$\begin{cases}(\theta_t\theta_\tau)=0\,,\\ \mathrm{D}_{11}-(\theta_t\theta_t)\,\mathrm{D}_{22}=0\end{cases}$$

*ist.*

Leiten wir aus einer gegebenen Kreisfläche K durch eine projektive Transformantion ihrer Punkte eine zweite Kreisfläche $\overline{\mathrm{K}}$ her, so sind zu erhalten:

$$\begin{cases}\overline{\mathrm{D}}_{11}=\dfrac{\mathrm{A}\sqrt{(\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau)-(\theta_t\theta_\tau)^2}}{n\mathrm{W}}\,\mathrm{D}_{11},\\[2ex] \overline{\mathrm{D}}_{12}=\dfrac{\mathrm{A}\sqrt{(\theta_t\theta_t)(_\tau\theta_\tau)-(\theta_t\theta_\tau)^2}}{n\mathrm{W}}\,\mathrm{D}_{12}\,,\\[2ex] \overline{\mathrm{D}}_{22}=\dfrac{\mathrm{A}\sqrt{(\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau)-(\theta_t\theta_\tau)^2}}{n\mathrm{W}}\,\mathrm{D}_{22}\,,\end{cases}$$

(1) HAYASI, T.: On the lines of Torsion, Tôhoku S. Reports, 3 (1914), p. 217–222.

(2) NAKAZIMA, S.: Kugelgeo. von MÖBIUS, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. 2, S. 36.

wobei A, $n$ und W $n$ W LILIENTHALS Buch[1] stehen.

(H) Es sei auf der Kreiffläche K $(u^1, u^2)$ mit vorgegebener Metrik und vorgegebener affiner Übertragung eine Kurve

$$(1) \qquad u^i = u^i(t), \quad t = u^1, \quad \tau \equiv u^2$$

gegeben. Dann wird ihr Tangentenverktor durch

$$(2) \qquad \dot{x} = x_i \dot{u}_i$$

und ihr Bogenelement durch

$$(3) \qquad \dot{s} = \sqrt{\frac{1}{\lambda}\,\theta_{ik}\,\dot{u}^i \dot{u}^k}\,, \qquad \theta_{ik} \equiv (\theta_i \theta_k)$$

bestimmt. Der Vektor

$$(4) \qquad t = \dot{x} / \dot{s} = \dot{u}^i / \dot{s} \cdot x_i$$

ist der Einheitsvektor in der Richtung der Tangente, und seine Änderung

$$(5) \qquad \dot{\mathfrak{t}} = \delta \mathfrak{t} / dt$$

miszt daher die Richtungsänderung der Kurve. Wir können dann vielleicht, wie in der elementaren Differentialgeometrie, den Verktor

$$(6) \qquad \mathfrak{K} = \dot{\mathfrak{t}} / \dot{s}$$

als den Krümmungsvektor der Kurve $(t)$ bezeichnen, und die Kurven $\mathfrak{K} = 0$ sind diejenigen Kurven der Kreisfläche K, die bei der gewählten Parallelübertragung ihre Richtung nicht ändern; wir bezeichnen sie daher als die „geradesten Linien" der gegebenen Maszbestimmung und Übertragung.

Wählen wir als Parameter die Bogenlänge der Kurve und setzen also $s=t$, so wird.

$$(7) \qquad \dot{s} = 1\,.$$

Somit wird

(1) LILIENTHAL R. V: Vorlesungen über Differentialgeometrie, zweiter Band (1913), S. 201.

$$(8) \qquad dt = d\dot{u}^i x_i ,$$

da

$$(9) \qquad \delta\dot{u}^i = d\dot{u}^i + \dot{u}^p da^i_p$$

und

$$(10) \qquad \ddot{\mathfrak{t}} = (\dot{u}^i + \dot{u}^p \dot{u}^q \beta^i{}_{pq}) x_i$$

ist. Hieraus folgt

$$(11) \qquad \mathfrak{t}\,\dot{\mathfrak{t}} = 1/2 \cdot \delta/ds \cdot 1/\lambda \cdot \theta_{ki}\, \dot{u}^i \dot{u}^k = 0 ,$$

d. h. der Vektor $\dot{\mathfrak{t}}$ steht auf $\mathfrak{t}$ senkrecht, wofern er nicht selbst verschwindet.

Aus (11) folgt

$$(12) \qquad \delta/ds \cdot \theta_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k = 0$$

wenn $\lambda$ konstant ist.[1]

(I) Die orthogonalen Trajektorien der Parameterkurve $d\tau = 0$ sind durch

$$(1) \qquad d\mathrm{U} \equiv (\theta_t \theta_t)\, dt + (\theta_t \theta_\tau)\, d\tau = 0$$

gegeben. Fliminieren wir $dt$ aus

$$(2) \qquad (\theta_t \theta_t)\, dt^2 + 2\,(\theta_t \theta_\tau)\, dt d\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) = 0$$

und

$$(3) \qquad d\mathrm{U} \equiv (\theta_t \theta_t)\, dt + (\theta_t \theta_\tau)\, d\tau ,$$

so folgt

$$(4) \qquad (\overline{\theta_t \theta_t})\, d\mathrm{U}^2 + (\overline{\theta_t \theta_\tau})\, d\mathrm{U} d\tau + (\overline{\theta_\tau \theta_\tau})\, d\tau^2 = 0 ,$$

wobei

$$(5) \qquad \begin{cases} (\overline{\theta_t \theta_t}) \equiv 1/(\theta_t \theta_t) , \quad (\overline{\theta_t \theta_\tau}) \equiv 0 , \quad (\overline{\theta_\tau \theta_\tau}) \equiv \theta \,/\, (\theta_t \theta_t) , \\ \theta^2 = (\theta_t \theta_t).(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_t \theta_\tau)^2 \end{cases}$$

gesetzt sind.

(1) Vgl. SALKOWSKI, E.: Affine Differentialgeometrie, Berlin und Leipzig, (1934), S. 114.

(5) sind die Gleichungen unserer *Minimallinien, die der* (1) $dt$, $d\tau$ *gemein sind.*

(**J**) Wir können den letzten Satz in §6 von OGURAS Arbeit[1] in dem Falle der Kreisfläche beweisen.

Weiter können wir $l_x$, $p_1$ in LILIENTHALS Buch[2] mit

$$(\theta_t\theta_t),\quad (\theta_t\theta_\tau),\quad (\theta_\tau\theta_\tau)$$

ausdrücken.

(**K**) Falls die Kreisfläche K die konstante Krümmung besitzt, so entsprechen den geodätischen Linien auf K die Geraden, wenn die punktweise eindeutige Abbildungen einer K auf einer Ebene entsprechen.

In diesem Falle soll die Differentialgleichung der geodätischen Linien das Integral

$$(1)\qquad A\tau + Bt + C = 0$$

besitzen, wobei A, B, C die willkürlichen Konstanten bedeuten.

Die Differentialgleichung muss also lauten:

$$(2')\qquad d^2t/d\tau^2 = 0.$$

Unter Zugrundelegung eines Systems geodätischer Polarkoordinaten $(\tau, t)$, von denen die Kurve $t$=const. auf K durch einen und denselben Punkt der Kreisfläche K hindurchgeht, nehmen die Quadrate der Längen der Linienelemente auf den K konstanten Krümmungsmasses die einfache Form an; je nachdem das Krümmungsmass der K gleich Null, positiv oder negativ ist, erhalten wir beziehlich der Werte

$$(3)\qquad \begin{cases} ds^2 = d\tau^2 + \tau^2 dt^2 \\ ds^2 = d\tau^2 + k^2(\sin \tau/k)\, dt^2, \\ ds^2 = d\tau^2 + k^2(\sinh \tau/k)^2\, dt^2. \end{cases}$$

---

(1) OGURA, K.: Trajectories in the conservative field of Force, Part I, Tôhoku Math. Journ. Vol. 7, S. 133 und S. 181.

(2) LILIENTHAL, R. v.: Vorlesungen über Differentialgeometrie zweiter Band. Leipzig und Berlin (1913), S. 211 und 212.

Entsprechend diesen drei Formen erhalten wir als Gleichungen der geodätischen Linien:

$$(4)\qquad \begin{cases} A\tau\cos t + B\tau\sin t + C = 0\,, & K = 0\,, \\ A\,\mathrm{tg}\,\tau/k\cdot\cos t + B\tan\tau/k\cdot\sin t + C = 0\,, & K > 0\,, \\ A\,\mathrm{tgh}\,\tau/k\cdot\cos t + B\,\mathrm{tgh}\,\tau/k\cdot\sin t + C = 0\,, & K < 0\,, \end{cases}$$

webei A, B, C willkürlicke Konstanten sind.

(**L**) Damit das Netz $(t, \tau)$ and K aus zwei Scharen der Minimalkurven bestehe, ist also notwendig und hinreichend, dasz zugleich

$$(1)\qquad (\theta_t\theta_\tau) = 0 \quad \text{und} \quad (\theta_\tau\theta_\tau) = 0\,, \quad (\lambda \neq \infty)$$

gelten, wobei $\lambda$ in meiner Arbeit[1] steht.

Aber in unserem Falle gilt nicht

$$(2)\qquad (\theta_\tau\theta_\tau) = 0\,,$$

sondern

$$(3)\qquad (\theta_\tau\theta_\tau) = 1\,.$$

so dasz das Netz $(t, \tau)$ aus zwei Scharen der Minimalkurven nicht besteht.

Es sei nun

$$(4)\qquad (\theta_t\theta_t) \neq 0\,, \quad (\theta_\tau\theta_\tau) \neq 0$$

und

$$(5)\qquad \omega = \sphericalangle(\mathfrak{x}_t\,, \mathfrak{x}_\tau)\,,$$

so ist zu erhalten

$$(6)\qquad \begin{cases} \cos\omega = (\theta_t\theta_\tau) : \sqrt{(\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau)}\,, \\ \sin\omega = T : \sqrt{(\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau)}\,, \quad 0 < \omega < \pi\,, \\ T^2 = (\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau) - (\theta_t\theta_\tau)^2\,. \end{cases}$$

Ist $\mathfrak{U}$ der Normalenvektor der K, so gilt

(1) NAKAZIMA, S.: Kugelgeo. von MÖBIUS, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. 2, S. 36.

$$(7) \qquad [\mathfrak{x}\mathfrak{U}] = \frac{(\theta_\tau\theta_\tau)\,\mathfrak{x}_t - (\theta_t\theta_\tau)\,\mathfrak{x}_\tau}{T}.$$

(**M**) $\rho_1$ und $\rho_2$ seien die beiden Hauptkrümmungen von K, so teilen

$$d\rho_1 = 0 \quad \text{und} \quad d\rho_2 = 0$$

die Umgebung des Kreisflächenpunktes in zwei Winkel.

Die beiden zugehörigen ausgezeichneten Richtungen genügen der quadratischen Gleichung(1)

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} (d\tau)^2, & -dt d\tau, & (dt)^2 \\ (\theta_t\theta_t), & (\theta_t\theta_\tau) & (\theta_\tau\theta_\tau) \\ \Delta_1\rho_1\cdot\Delta_1\rho_2, & \frac{1}{2}(\Delta_1\rho_1\cdot\Delta_2\rho_2+\Delta_2\rho_1\cdot\Delta_1\rho_2), & \Delta_1\rho_1\cdot\Delta_2\rho_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Aus (1) können wir die *Hauptverzerrungsrichtungen* auf K definieren.(2)

Aus der besonderen Form der Gleichung folgt sofort die Orthogenalität der beiden Richtungen.

Ist die betrachtete Kreisfläche eine W-Kreisfläche, ist also

$$(2) \qquad (\theta_t\theta_\tau) = 0,$$

so fallen die beiden Richtungen

$$(3) \qquad d\rho_1 = 0 \quad \text{und} \quad d\rho_2 = 0$$

zusammen.

Die Gleichung (1) wird identisch erfüllt, wenn

$$(4) \qquad \begin{cases} (\theta_t\theta_t) : (\theta_t\theta_\tau) : (\theta_\tau\theta_\tau) \\ = \Delta_1\rho_1\cdot\Delta_1\rho_2 : \frac{1}{2}(\Delta_1\rho_1 . \Delta_2\rho_2 + \Delta_2\rho_1\cdot\Delta_1\rho_2) : \Delta_1\rho_1\cdot\Delta_2\rho_2 \end{cases}$$

gilt.

Nun setzen wir (1) an in der folgenden Form

$$(5) \qquad p_{11}dt^2 + 2p_{12}dtd\tau + p_{22}d\tau^2 = 0,$$

---

(1) VAKSELJ, A.: Beiträge zur Flächentheorie, Mathematische Zeitschrift 38 (1934), S. 451.

(2) VAKSELJ, a. a. O., 451.

so können wir leicht

$$(6) \qquad p_{11}, \; p_{12}, \; p_{22}$$

mit

$$(7) \qquad \Delta_1\rho_1, \; \Delta_2\rho_2, \; \Delta_1\rho_2, \; \Delta_2\rho_1, \; (\theta_t\theta_t), \; (\theta_t\theta_\tau), \; (\theta_\tau\theta_\tau)$$

bezeichnen.

Wie wir schon wissen, ist

$$(8) \qquad (\theta_t\theta_t)\,dt^2 + 2(\theta_t\theta_\tau)\,dtd\tau + (\theta_\tau\theta_\tau)\,d\tau^2 = 0$$

die Gleichung der Minimallinien.

Aus (6) und (8) bilden wir

$$(9) \qquad \mathrm{P} = \frac{p_{11}dt^2 + 2p_{12}dtd\tau + p_{22}d\tau^2}{(\theta_t\theta_t)\,dt^2 + 2(\theta_t\theta_\tau)dtd\tau + (\theta_\tau\theta_\tau)\,d\tau^2},$$

so soll P für alle Werte von $k = d\tau : dt$ dasselbe sein, wenn

$$(10) \qquad p_{11} : p_{12} : p_{22} = (\theta_t\theta_t) : (\theta_t\theta_\tau) : (\theta_\tau\theta_\tau)$$

gilt.

Weiter können wir untersuchen wie in OGURAS Arbeit.(1)

Wie erkannt können(2) wir P so schreiben:

$$(11) \qquad \mathrm{P} = {}_{(1)}\mathrm{P}\cos^2\theta_1 + {}_{(2)}\mathrm{P}\sin^2\theta_1 .$$

Betrachten wir (5), so können wir sehen, dasz (5) beide definierte Kurvenscharen auf K zueinander konjugiert sind, wenn die Koeffizienten $p_{11}, p_{12}, p_{22}$ mit $\mathrm{D}_{11}, \mathrm{D}_{12}, \mathrm{D}_{22}$ unter der Bedingung

$$(12) \qquad \mathrm{D}_{11}p_{22} - 2\,\mathrm{D}_{12}p_{12} + \mathrm{D}_{22}p_{11} = 0$$

verknüpft sind.

Die Torsionslinien sind diejenigen Kreisflächenkurven, längs deren P in (9) der Bedingung(3)

(1) OGURA, K.: On the theory of representation of Surfaces, Tôhoku Math. Journ. 12 (1917), S. 240.

(2) DUSCHEK-MAYER: Lehrbuch der Differentialgeometrie, I (1930), S. 104.

(3) TAKASU, T.: Differentialkugelgeometrie, II, Science Report of the Tôhoku Imp. Univ., Vol. XVII (1928), S. 522.

$$\mathrm{P} = \frac{(\theta_t\theta_t)\,p_{22} + (\theta_\tau\theta_\tau)\,p_{11} - 2\,(\theta_t\theta_\tau)\,p_{12}}{2\,\theta}$$

genügt, wenn $(\theta_h\theta_k) = \mathrm{G}_{hk}$, $p_{hk} = \mathrm{D}_{hk}$, wo

$$\theta^2 = (\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau) - (\theta_t\theta_\tau)^2 .$$

gilt.

Man setze (9) in

$$(13) \qquad \mathrm{P} = \frac{p_{11} + 2\,p_{12}\mathrm{t} + p_{22}\mathrm{t}^2}{(\theta_t\theta_t) + 2\,(\theta_t\theta_\tau)\,t + (\theta_\tau\theta_\tau)\,t^2}\,,$$

wo $\mathrm{t} = d\tau : dt$ ist.

Berechnet man

$$(14) \qquad d/d\mathrm{t} \cdot (\mathrm{P}) = 0\,,$$

so folgt

$$(15) \qquad \begin{cases} (p_{12} + p_{22}t)\,\{(\theta_t\theta_t) + 2\,(\theta_t\theta_\tau)\,t + (\theta_\tau\theta_\tau)\,t^2\} \\ \qquad = \{(\theta_t\theta_\tau) + (\theta_\tau\theta_\tau)\,t\}\,(p_{11} + 2\,p_{12}t + p_{22}t^2)\,. \end{cases}$$

Aus (13) und (15) erhalten wir

$$(16) \qquad \begin{cases} \mathrm{G}_{hk}du^h - 1/\mathrm{P}\cdot\mathrm{D}_{hk}du^h = 0\,, \quad \text{wo} \quad \mathrm{G}_{hk} = (\theta_h\theta_k), \quad du^1 = dt\,, \\ du^2 = d\tau, \quad \mathrm{D}_{hk} = p_{hk}\,. \end{cases}$$

Eliminieren wir $d\tau : dt$ aus (16), so erhalten wir für die extremalen Werte von 1/P wiederum die Gleichungen (16), woraus[1]

$$(17) \qquad \mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 = 1/2\cdot\mathrm{G}^{ik}\mathrm{D}_{ik} = \mathrm{H}\,,$$

$$(18) \qquad \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 = \mathrm{D}/\mathrm{G} = \mathrm{K}$$

folgen.

(N) Aus § 225 in TAKASUs Buch[2] können wir wissen, dasz $\lambda$ in meiner Arbeit[3] gegeben in der folgenden Gleichung

(1) Vgl. TAKASU, T.: Differentialgeo. in den Kugelräumen, Bd. I (1938) Tokyo, S. 214.

(2) TAKASU, T.: Differentialgeo. in den Kugelräumen, Bd. I (1938) Tokyo, S. 214.

(3) NAKAZIMA (=MATUMURA=MATSUMURA), S.: Kugelgeo. von MÖBIUS, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. 2, S. 36.

$$(1) \qquad \lambda = C.\exp. \int E_{k\nu} X_s G^{sk} du^\nu ,$$

wo

$$(2) \qquad \begin{cases} G_{hk} = (\theta_h \theta_k), \quad du^1 = dt, \quad du^2 = d\tau, \\ E^{hk} E_{th} X_{sk} G^{ts} = - G^{hk} X_{hk} = 0 \end{cases}$$

gilt.

(O) Wir betrachten eine Rotationsfläche als Kreisfläche, so ist das Quadrat ihres Bogenelements

$$(1) \qquad ds^2 = (\theta_t \theta_t)\, dt^2 + d\tau^2 .$$

Besteht (1), so wird die notwendige und hinreichende Bedingung für die Möglichkeit, $ds^2$ in die harmonische Form zu bringen, durch zwei Gleichungen für $\mu$ ausgedrückt, welche bei passend gewählter Form der Funktionen A und W von $t$ sind(1):

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = (\theta_t \theta_t)\left(W + A' \int \frac{d\tau}{(\theta_t \theta_t)}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\frac{1}{(\theta_t \theta_t)}\left(\frac{\partial \mu}{\partial \tau} - 3A\right)\right] = \frac{2}{(\theta_t \theta_t)\sqrt{(\theta_t \theta_t)}} \frac{\partial}{\partial t}\left[\sqrt{(\theta_t \theta_t)}\left(W + A' \int \frac{d\tau}{(\theta_t \theta_t)}\right)\right].$$

(P) Im folgenden entwickeln wir die allgemeine Theorie des Entsprechens der Kreisflächen.

Es seien zwei Kreisflächen K und $\bar{K}$ gegeben, zwischen deren Punkten irgend eine eindeutige Beziehung besteht, nur der Bedingung unterworfen, dass reellen Punkten der einen reelle Punkte der anderen und unendlich nahen Punkten der einen ebensolche der anderen zugeordnet seien.

Dann nennen wir den Quotienten zweier Bogenelemente

$$(1) \qquad \rho = ds : d\bar{s} = \sqrt{\{\bar{\lambda}(\theta_t \theta_t)\, t'^2 + (\theta_\tau \theta_\tau)\}} : \sqrt{\{\lambda\, \overline{(\theta_t \theta_t)}\, t'^2 + (\theta_\tau \theta_\tau)\}}$$

entsprechender Linien den „*Aehnlichkeitsparameter.*"

Sämtliche $\infty^2$ Linien

---

(1) Vgl. RAFFY, L.: Recherches sur les surfaces harmoniques. Résumè Bulletin de la Société Mathématique de France publié par les secrétaires, Paris XXII (1894), 63-66, 84-96.

$$(2) \qquad \rho = \text{const.}$$

werden „*Aehnlichkeit bewahrende Linien*“ genannt.

Durch jeden Punkt $(t, \tau)$ von K oder $\overline{\text{K}}$ gehen $\infty^1$ solche Linien, und jedem Werte von $\rho$ entsprechen deren zwei mit Ausnahme der Punkte

$$(3) \qquad (\theta_t\theta_t):(\overline{\theta_t\theta_t}) = (\theta_\tau\theta_\tau):(\overline{\theta_\tau\theta_\tau}),$$

wo diese zwei zusammenfallen.

Das Entsprechen wird in diesen Punkten isogonal.

Hat letzeres in allen Punkten statt, so gibt es $\infty^1$ Aenlichkeit bewahrende Linien.

(**Q**) Ween

$$(1) \qquad (\theta_t\theta_\tau) = 0$$

in

$$(2.) \qquad (\theta_t\theta_t)\, dt^2 + 2\,(\theta_t\theta_\tau)\, dtd\tau + d\tau^2 = 0$$

gilt, so folgt

$$ds^2 = (\theta_t\theta_t)\, dt^2 + d\tau^2;$$

so wird die geodätische Krümmung einer Kurve $\tau$=const. durch den Ausdruck $\rho_g^{-1}$ dargestellt.

Mittels des Differentiators können wir uns jetzt leicht von der besonderen Koordinatenwahl befreien.

Man findet im vorliegenden Fall

$$(3) \qquad \nabla\varphi = \frac{(\theta_t\theta_t)\,\varphi_\tau^2 + \varphi_t^2}{(\theta_t\theta_t)}$$

$$= \left(\frac{\varphi_t}{\sqrt{(\theta_t\theta_t)}}\right)^2 + (\varphi_\tau)^2,$$

$$(4) \qquad \nabla(\varphi, \psi) = \frac{\varphi_t\psi_\tau}{(\theta_t\theta_t)} + \varphi_\tau\psi_t\,.$$

$$(5) \qquad \nabla\varphi = \frac{1}{\sqrt{(\theta_t\theta_t)}}\left\{(\sqrt{(\theta_t\theta_t)}\varphi_\tau)_\tau + \left(\frac{1}{\sqrt{(\theta_t\theta_t)}}\varphi_t\right)_t\right\},$$

$$(6)\qquad \nabla\tau = 1.$$

$$(7)\qquad \nabla\tau = \frac{1}{\sqrt{(\theta_t\theta_t)}}(\sqrt{(\theta_t\theta_t)})_\tau = (\sqrt{(\theta_t\theta_t)})_\tau \cdot \sqrt{(\theta_t\theta_t)},$$

$$(8)\qquad \nabla(\tau, 1) = 0,$$

wo $\nabla\varphi = \nabla(\varphi, \varphi)$ = der erste Differentiator von Beltrami,

$\nabla(\varphi, \psi)$ = der gemischte erste Differentiator von Beltrami,

$\Delta(\varphi)$ = der zweite Differentiator von Beltrami

ist.

Nach den drei Gleichungen (6) bis (8) wird

$$(9)\qquad \rho_g^{-1} = -\frac{\Delta\tau}{\sqrt{\nabla\tau}} - \nabla\left(\tau, \frac{1}{\sqrt{\nabla\tau}}\right).$$

Allgemein ergibt sich daraus für die geodätische Krümmung einer Kurve

$$\varphi(t, \tau) = \text{const.}$$

folgender Ausdruck:

$$(10)\qquad \rho_g^{-1} = -\frac{\Delta\varphi}{\sqrt{\nabla\varphi}} - \nabla\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{\nabla\varphi}}\right).$$

(**R**) Wir betrachten BIANCHIs Translationsfläche[1] als Kreisfläche, so gilt

$$(1)\qquad \begin{cases} ds^2 = dt^2 + 2(\theta_t\theta_\tau)\, dt d\tau + d\tau^2, \\ (\theta_t\theta_\tau) = U'V' \end{cases}$$

(**S**) Betrachten wir eine der zwei Scnaren von Parameterlinien auf der Kreisfläche, so ist sie die Kurve

$$t = \text{const.},$$

so ist die Gleichung der Loxodromen

(1) BIANCHI, L.: Popra la deformazione di una classe di auperficie, Giornale matematiche ad uso degli studenti delle università italiane pubblicato per cura del Prof. G. GATTAGLINI, XVI, p. 267–270.

$$\{\sqrt{(\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau)-(\theta_t\theta_\tau)^2}-a(\theta_t\theta_\tau\}\,d\tau-a(\theta_t\theta_t)\,dt=0,$$

deren $a$ in DINAs Arbeit[1] steht.

(**T**) Wenn wir VOSS' Kreisfläche mit V bezeichnen, so gilt

$$(\theta_t\theta_t)=1,\quad (\theta_t\theta_\tau)=\cos 2w,\quad (\theta_\tau\theta_\tau)=1\,,$$

wo

$$(2)\qquad \partial/\partial t\partial\tau\,\{\cos^{-1}(\theta_t\theta_\tau)\}+\sqrt{1-(\theta_t\theta_\tau)^2}=0$$

ist.[2]

Der Bogenelement von V ist

$$(3)\qquad ds^2=dt^2+2(\theta_t\theta_\tau)\,dtd\tau+d\tau^2\,,$$

wo (2) gilt.

Die Tangenten Koordinaten X, Y, Z und W erfüllen

$$(4)\qquad \partial^2\phi/\partial t\partial\tau+(\theta_t\theta_\tau)\cdot\phi=0\,.$$

CODAZZIS Gleichungen von V sind

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial D}{\partial\tau}-\dfrac{1}{\sqrt{1-(\theta_t\theta_\tau)^2}}\dfrac{\partial}{\partial t}\cos^{-1}(\theta_t\theta_\tau)\cdot D''=0\,,\\[2ex] \dfrac{\partial D''}{\partial t}-\dfrac{1}{\sqrt{1-(\theta_t\theta_\tau)^2}}\dfrac{\partial}{\partial\tau}\cos^{-1}(\theta_t\theta_\tau)\cdot D=0\,, \end{cases}$$

deren D und D'' in EISENHARTS[1] stehen.

Weiter kann man V nach EISENHARTS Arbeit[2] untersuchen.

(**U**) Nachstehend benutzen wir

$$(1)\qquad (\theta_t\theta_t),\quad (\theta_t\theta_\tau),\quad (\theta_\tau\theta_\tau)$$

zur Kugel.

Es soll ein dem Polarkoordinatensystem der Ebene analoges System eingeführt werden.

---

(1) DINA, C.: Sopra una curva particolare giacente sopra una superficie in generale, Giornale matematico ad uso degli studenti delle università italiane pubblicato per cura del Prof. G. Gattaglini, Napoli, XIX, p. 298-310.

(2) EISENHART, L. P.: Transformations of Surfaces of VOSS, Transactions of the American Math. Society, 15 (1914), S. 246.

Der Pol 0 liege auf der Kugeloberfläche, $\tau$ sei der sphärische Abstand des betreffenden Punktes von 0, $t$ der Winkel, den $\tau$ mit einem Anfangsmeridian bildet, beide im Bogenmasz gemessen.

$\tau$ geht also von 0 bis $\pi$, $t$ dagegen kann alle Werte annehmen, auch gröszer werden als $2\pi$.

Der Kugelradius sei gleich Eins. Dann lauten die Gleichungen der Kugel:

$$(2)\qquad \begin{cases} \xi = \sin\tau \sin t, \\ \eta = \sin\tau \cos t, \\ \zeta = \cos\tau. \end{cases}$$

Das Linienelement einer beliebigen Kurve auf der Fläche lautet dann:

$$(3)\qquad ds^2 = d\tau^2 + \sin^2\tau \cdot dt^2,$$

so ist zu erhalten

$$(4)\qquad (\theta_t\theta_t) = \sin^3\tau, \quad (\theta_t\theta_\tau) = 0, \quad (\theta_\tau\theta_\tau) = 1.$$

Und der Winkel $\mu$, den diese Kurve mit einem Meridian bildet, wird bestimmt durch

$$(5)\qquad \tan\mu = \sin\tau \cdot dt/dt,$$

oder

$$\tan\mu = \sqrt{(\theta_t\theta_t)} \cdot dt/d\tau.$$

Weiter können wir untersuchen wie Roesers Arbeit,[1] z. B. wir erhalten

$$\tan\tau \cdot tg\,\tau_1 \sin(t_1 - t) + tg\,\tau\, tg\,\tau_2 \sin(t - t_2) + tg\,\tau_1\, tg\,\tau_2 \sin(t_2 - t_1) = 0,$$

wenn ein gröszter Kreis durch zwei feste Punkte geht.

(1) ROESER, E.: Die Verfolgungskurve auf der Kugel, Inaugural-Dissertation, Vereinigten Friedrichs-Universität Halle-Wittenberg (1909).

## ( 2 )

Im folgenden machen wir

$$\eta = \cos \alpha \cdot \xi + \sin \alpha \cdot \xi'$$

klar.[1]

(A) Wir betrachten

$$(1) \qquad \eta = \cos \alpha \cdot \xi + \sin \alpha \cdot \xi'$$

und

$$(2) \qquad \zeta = \cos \alpha \cdot \eta + \sin \alpha \cdot \eta',$$

wo $\alpha$ die Konstante ist.

Aus (1) und (2) folgt

$$(3) \qquad \begin{cases} \zeta = \cos \alpha \,\{\cos \alpha \cdot \xi + \sin \alpha \cdot \xi'\} + \sin \alpha \,\{\cos \alpha \cdot \xi' + \sin \alpha \cdot \xi''\} \\ \quad = \cos^2 \alpha \cdot \xi + 2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \xi' + \sin^2 \alpha \cdot \xi'' \end{cases}$$

anderseits muss

$$(4) \qquad \zeta = \cos 2\alpha \cdot \xi + \sin 2\alpha \cdot \xi'$$

gelten

Aus (3) und (4) folgt also

$$\xi'' + \xi = 0 .$$

(B) Wir betrachten

$$\begin{cases} {}_{(1)}\eta = \cos \alpha \cdot {}_{(1)}\xi + \sin \alpha \cdot {}_{(1)}\xi', \\ {}_{(2)}\eta = \cos \alpha \cdot {}_{(2)}\xi + \sin \alpha \cdot {}_{(2)}\xi', \\ {}_{(3)}\eta = \cos \alpha \cdot {}_{(3)}\xi + \sin \alpha \cdot {}_{(3)}\xi', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots . \end{cases}$$

(1) THOMSEN, G.: Über konforme Geo. II, Abh. ans dem Math. Seminar der Hamb. Univ. 4 Bd. S. 132.

Wenn $\mathfrak{p}$ auf ${}_{(1)}\eta$ senkrecht ist, so folgt

$$\begin{cases} \cos\alpha\cdot(\mathfrak{p}\cdot{}_{(1)}\xi)+\sin\alpha\cdot(\mathfrak{p}\cdot{}_{(1)}\xi'), \\ \cos\alpha\cdot(\mathfrak{p}\cdot{}_{(2)}\xi)+\sin\alpha\cdot(\mathfrak{p}\cdot{}_{(2)}\xi'), \\ \cos\alpha\cdot(\mathfrak{p}\cdot{}_{(3)}\xi)+\sin\alpha\cdot(\mathfrak{p}\cdot{}_{(3)}\xi'), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots, \end{cases}$$

daraus ergibt sich

$$\begin{cases} (\mathfrak{p}\cdot{}_{(2)}\xi)(\mathfrak{p}\cdot{}_{(1)}\xi')+(\mathfrak{p}\cdot{}_{(2)}\xi')(\mathfrak{p}\cdot{}_{(1)}\xi)=0, \\ (\mathfrak{p}\cdot{}_{(3)}\xi)(\mathfrak{p}\cdot{}_{(1)}\xi')+(\mathfrak{p}\cdot{}_{(3)}\xi')(\mathfrak{p}\cdot{}_{(1)}\xi)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots, \end{cases}$$

wo $\mathfrak{p}$ der Kreis in $R_2$ ist, So ist zu erkennen, dasz

$$\cos\widehat{\mathfrak{p},{}_{(n)}\xi}\cdot\cos\widehat{\mathfrak{p},{}_{(1)}\xi'}+\cos\widehat{\mathfrak{p},{}_{(n)}\xi'}\cdot\cos\widehat{\mathfrak{p},{}_{(1)}\xi}=0,$$

$$(n=2,3,4,\ldots).$$

(**C**) Wir betrachten

$$(1)\qquad \eta=\cos\alpha\cdot\xi+\sin\alpha\cdot\xi',$$

wo $\xi$ der Kreis in $R_2$ ist.

Ist $n$ eine ganze Zahl, so folgt aus (1)

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^{4n}\eta}{d\alpha^{4n}}=\cos\alpha\cdot\xi+\sin\alpha\cdot\xi', \\ \dfrac{d^{4n+1}\eta}{d\alpha^{4n+1}}=-\sin\alpha\cdot\xi+\cos\alpha\cdot\xi', \\ \dfrac{d^{4n+2}\eta}{d\alpha^{4n+2}}=-\cos\alpha\cdot\xi-\sin\alpha\cdot\xi', \\ \dfrac{d^{4n+3}\eta}{d\alpha^{4n+3}}=\sin\alpha\cdot\xi-\cos\alpha\cdot\xi', \\ \dfrac{\alpha^{4n+4}\eta}{d\alpha^{4n+4}}=\cos\alpha\cdot\xi+\sin\alpha\cdot\xi', \end{cases}$$

daraus ergibt sich

$$(3)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{d^{4n}\eta}{d\alpha^{4n}}\,\dfrac{d^{4n+1}\eta}{d\alpha^{4n+1}}\right)=0\,, & \left(\xi\,\dfrac{d^{4n+1}\eta}{d\alpha^{4n+1}}\right)=-\sin\alpha\,,\\[2ex] \left(\dfrac{d^{4n+1}\eta}{d\alpha^{4n+1}}\,\dfrac{d^{4n+1}\eta}{d\alpha^{4n+1}}\right)=1, & \left(\xi'\,\dfrac{d^{4n+1}\eta}{d\alpha^{4n+1}}\right)=\cos\alpha\,, \end{cases}$$

so können wir wissen, dasz

$$(4)\qquad \frac{d^{4n}\eta}{d\alpha^{4n}}\perp\frac{d^{4n+1}\eta}{d\alpha^{4n+1}}\,,\qquad \frac{d^{4n+1}\eta}{d\alpha^{4n+1}}\perp\frac{d^{4n+2}\eta}{d\alpha^{4n+2}}$$

gilt.

Weiter können wir untersuchen wie in TAKASUs Buch.(1)

Es sei

$$(5)\qquad \frac{d^{4n}\eta}{d\alpha^{4n}}=\cos\alpha\cdot\xi+\sin\alpha\cdot\xi'\,.$$

Diese Kugel beschreibt das folgende Winkelelement:

$$(6)\qquad \left(\frac{d^{4n+1}\eta}{d\alpha^{4n+1}}\,\frac{d^{4n+1}\eta}{d\alpha^{4n+1}}\right)=\left(\frac{d\xi}{d\alpha}\,\frac{d\xi}{d\alpha}\right)\cos^2\alpha+\left(\frac{d\xi'}{d\alpha}\,\frac{d\xi'}{d\alpha}\right)\sin^2\alpha$$
$$+\,2\left(\frac{d\xi}{d\alpha}\,\frac{d\xi'}{d\alpha}\right)\sin\alpha\cos\alpha\,.$$

Aus

$$(7)\qquad \partial/\partial\alpha\cdot(d^{4n+1}\eta\; d^{4n+1}\eta)=0$$

ergibt sich:

$$(8)\qquad \tan 2\alpha=\frac{2\,(d\xi\, d\xi')}{-(d\xi d\xi)+(d\xi' d\xi')}$$

oder

$$(9)\qquad \begin{cases} \tan\alpha=\dfrac{-(d\xi' d\xi')+(d\xi d\xi)-\sqrt{\{(d\xi d\xi)-(d\xi' d\xi')\}^2+4\,(d\xi d\xi')^2}}{2\,(d\xi d\xi')}\,,\\[2ex] \tan(\alpha+\frac{\pi}{2})=\dfrac{-(d\xi' d\xi')+(d\xi d\xi)+\sqrt{\{(d\xi d\xi)-(d\xi' d\xi')\}^2+4\,(d\xi d\xi')^2}}{2\,(d\xi d\xi')}\,. \end{cases}$$

---

(1) TAKASU, T.: Differentialgeometrien in den Kugelräumen. Bd. I, Tokyo, 1938, S. 88.

(**D**) Für den Winkel $\varphi$ zwischen dem Kreis $\mathfrak{x}^\alpha$ und der Kugel

$$(1) \qquad \eta = \cos\alpha \cdot \xi + \sin\alpha \cdot \dot{\xi}$$

haben wir

$$(2) \qquad \cos^2\varphi = A_{\alpha\beta}(\mathfrak{x}^\alpha, \cos\alpha \cdot \xi + \sin\alpha \cdot \dot{\xi})(\mathfrak{x}^\beta, \cos\alpha \cdot \xi + \sin\alpha \cdot \dot{\xi}),$$

wo $\xi$ die Kugel in $R_3$ ist.

Wegen

$$(3) \qquad |A_{\alpha\beta}| = 1 : A > 0$$

ist im Rellen nur $\cos^2\varphi = 0$ möglich, wenn

$$(4) \qquad (\mathfrak{x}^\alpha, \cos\alpha \cdot \xi + \sin\alpha \cdot \dot{\xi}) \equiv 0$$

ist.

Erweitern wir unsere Kugelgeometrie auf das komplexes Gebiet, so ist der Fall $\cos^2\varphi = 0$ auch möglich, ohne dass (4) gilt.

Wir wollen sagen, dass der Kreis $\mathfrak{x}^\alpha$ auf die Kugel halbsenkrecht (1) sei.

Wählen wir als Hilfskugel $\mathfrak{x}^\alpha$ speziell die Scheitel

$$(5) \qquad \mathfrak{x}^{\mathrm{I}} = \mathfrak{u}, \quad \mathfrak{x}^{\mathrm{II}} = \mathfrak{y},$$

so folgt aus $A > 0$

$$(6) \qquad \mathfrak{u}\mathfrak{y} \neq 0,$$

und es gilt

$$(7) \qquad A_{11} = 0, \quad A_{12} = 1/\mathfrak{u}\mathfrak{y}, \quad A_{22} = 0,$$

und aus (2) folgt

$$(8) \qquad \cos^2\varphi = \frac{(\mathfrak{u}, \cos\alpha \cdot \xi + \sin\alpha \cdot \dot{\xi})(\mathfrak{y}, \cos\alpha \cdot \xi + \sin\alpha \cdot \dot{\xi})}{(\mathfrak{u}\mathfrak{y})}.$$

Daraus folgt der

**Satz:** *Ist der Kreis auf die Kugel* (1) *halbsenkrecht, so liegt ein Scheitel auf ihr, und ist er auf die Kugel senkrecht, so liegen seine beiden Scheitel auf ihr.*

Wir können (1) setzen in

$$(9)\qquad \eta=[\{e^{\alpha i}+e^{-\alpha i}\}:2]:\xi+[\{e^{\alpha i}-e^{-\alpha i}\}:2i]\cdot\dot{\xi}\,.$$

Weiter können wir setzen

$$(10)\qquad \eta=\xi\left\{1-\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}-\frac{\alpha^6}{6!}+\dots\right\}$$
$$+\dot{\xi}\left\{\alpha-\frac{\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^5}{5!}-\frac{\alpha^7}{7!}+\dots\right\},$$

wenn $\alpha$ klein ist.

(**E**) Betrachten wir

$$(1)\qquad \eta=\sum_{i=1}^{m}\{\mathrm{const.}\cdot{}_{(i)}\xi\cos i\varphi+\mathrm{const.}\cdot{}_{(i)}\xi'\sin i\varphi\},$$

wo ${}_{(i)}\xi$ die Kugeln in $R_n$ bedeuten.

(1) bezeichnet im allgemeinen zwei Punkte im $R_n$, wenn $m=n$ gilt.

Wenn $1<m<n$ in (1) besteht, so bezeichnet (1) den Kreis in $R_n$.

$$(2)\qquad \eta(t)=\sum_{i=1}^{m}\{\mathrm{const.}\,{}_{(i)}\xi(t)\cos i\varphi+\mathrm{const.}\,{}_{(i)}\xi'(t)\sin i\varphi\},$$
$$1<m<n$$

oder

$$(3)\qquad \eta(t)=\sum_{i=1}^{m}\{\mathrm{const.}\,{}_{(i)}\xi\cos i\varphi(t)+\mathrm{const.}\,{}_{(i)}\xi'\sin i\varphi(t)\}$$

bezeichnen die Kreisschar in $R_n$, wo $1>m<n$, $t$ ein Parameter ist.

Mit

$$(4)\qquad \eta=\sum_{i=1}^{m}\{\mathrm{const.}\,{}_{(i)}\xi(t)\cos i\varphi+\mathrm{const.}\,{}_{(i)}\xi'(t)\sin i\varphi\}$$

oder

$$(5)\qquad \eta=\sum_{i=1}^{m}\{\mathrm{const.}\,{}_{(i)}\xi\cos i\varphi(t)+\mathrm{const.}\,\xi'\sin i\varphi(t)\}$$

können wir zwei Kurven in $R_n$ bezeichnen.

( 3 )

Im folgenden erwähnen[1] wir

$$\cos^2\varphi = \frac{T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta}{A^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta}$$

und

$$\cos^2\varphi = T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta\,.$$

(**A**) Wenn

$$C^2T^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta}$$

$$\cos^2\varphi = \frac{T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta}{A^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta}\,,$$

so folgt

$$\cos^2\varphi = C^2,$$

wo C die Konstante ist.

Da gilt

$$\frac{A^{11}}{T^{12}} = \frac{A^{12}}{T^{12}} = \frac{A^{22}}{T^{22}} = C^2 = \frac{\alpha A^{11} + \beta A^{12} + \gamma A^{22}}{\alpha T^{11} + \beta T^{12} + \gamma T^{22}}\,,$$

wo $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ beliebige Konstanten sind,

(**B**) Wenn

$$T^{\alpha\beta} = k^2$$

in

$$\cos^2\varphi = T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta\,,$$

so folgt

$$\cos^2\varphi = k^2\rho_\beta\rho_\beta\,,$$

wo $k$ die Konstante ist.

(**C**) Ist

$$A^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta} = k^2$$

---

(1) NAKAZIMA, S.: Differentialgeo. der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ., Vol. 34, S. 196.

in

$$\sin^2\varphi = (A^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta})\,\rho_\alpha\rho_\beta\,,$$

so folgt

$$\sin^2\varphi = k^2\rho_\alpha\rho_\beta\,.$$

Gilt

$$\frac{A^{11}-T^{11}}{T^{11}} = \frac{A^{12}-T^{12}}{T^{12}} = \frac{A^{22}-T^{22}}{T^{22}} = c^2$$

in $\sin^2\varphi = (A^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta})\,\rho_\alpha\rho_\beta$, so haben wir $\sin^2\varphi = c^2$.

(**D**) Ist

$$c^2(A^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}) = T^{\alpha\beta}$$

in

$$\tan^2\varphi = \frac{(A^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta})\,\rho_\alpha\rho_\beta}{T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta}\,,$$

so folgt

$$\tan^2\varphi = c^2\,,$$

da

$$\frac{T^{11}}{A^{11}-T^{11}} = \frac{T^{12}}{A^{12}-T^{12}} = \frac{T^{22}}{A^{22}-T^{22}}$$
$$= c^2 = \frac{\alpha T^{11} + \beta T^{12} + \gamma T^{22}}{\alpha(A^{11}-T^{11}) + \beta(A^{12}-T^{12}) + \gamma(A^{22}-T^{22})}$$

gilt.

(**E**) Es seien zwei Kreise $\mathfrak{K}$ und $\bar{\mathfrak{K}}$ in $R_3$ gegeben. Ist

$$(1) \qquad \mathfrak{y} = \rho_\alpha \mathfrak{x}^\alpha$$

eine normierte Kugel durch $\mathfrak{K}$ mit

$$(2) \qquad (\mathfrak{y}\mathfrak{y}) = \rho_\alpha\rho_\beta A^{\alpha\beta} = 1\,,$$

so gilt

$$(3) \qquad \cos^2\varphi = \rho_\alpha\rho_\beta\, T^{\alpha\beta},$$

wo $\varphi$ der Winkel zwischen $\mathfrak{y}$ und $\bar{\mathfrak{R}}$ ist.

$T^{\alpha\beta}$ steht in meiner Arbeit.[1]

Aus (2) und (3) ergibt sich

$$(4) \qquad \cos^2\varphi = \rho_\alpha\rho_\beta T^{\alpha\beta} : \rho_\alpha\rho_\beta A^{\alpha\beta}.$$

Nehmen wir $\bar{\mathfrak{R}}$ anstatt $\mathfrak{R}$ in (4), so folgt

$$(5) \qquad \cos^2\bar\varphi = \rho_\alpha\rho_\beta \bar T^{\alpha\beta} : \rho_\alpha\rho_\beta \bar A^{\alpha\beta}.$$

Eliminieren $\rho_{\mathrm{I}}$, $\rho_{\mathrm{II}}$ aus (4), (5) und

$$(6) \qquad A\rho_{\mathrm{I}}^2 + 2B\rho_{\mathrm{I}}\rho_{\mathrm{II}} + c\rho_{\mathrm{II}}^2 = 0,$$

so folgt

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ T^{11}-\cos^2\varphi\cdot A^{11} & T^{12}-\cos^2\varphi\cdot A^{12} & T^{22}-\cos^2\varphi\, A^{22} \\ \bar T^{11}-\cos^2\bar\varphi\cdot \bar A^{11} & \bar T^{11}-\cos^2\bar\varphi\cdot \bar A^{12} & \bar T^{22}-\cos^2\bar\varphi\, \bar A^{22} \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ T^{11} & T^{12} & T^{22} \\ \bar T^{11} & \bar T^{12} & \bar T^{22} \end{vmatrix} - \cos^2\varphi \begin{vmatrix} A & B & C \\ A^{11} & A^{12} & A^{22} \\ \bar T^{11} & \bar T^{12} & \bar T^{22} \end{vmatrix}$$

$$- \cos^2\bar\varphi \begin{vmatrix} A & B & C \\ T^{11} & T^{12} & T^{22} \\ \bar A^{11} & \bar A^{12} & \bar A^{22} \end{vmatrix} + \cos^2\varphi\cos^2\bar\varphi \begin{vmatrix} A & B & C \\ A^{11} & A^{12} & A^{22} \\ \bar A^{11} & \bar A^{12} & \bar A^{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Weiter ist zu untersuchen wie in OGURAS Arbeit.[2]

Wenden wir uns an den Fall des Funktionenraumes, so folgt aus (2) und (3)

$$(7) \qquad \int \rho_\alpha\rho_\beta A^{\alpha\beta} = 1,$$

$$(8) \qquad \int \rho_\alpha\rho_\beta T^{\alpha\beta} = \cos^2\varphi.$$

(1) Vgl. NAKAZIMA (=MATUMURA=MATSUMURA), S.: Kugelgeo. von MOBIUS, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. 2, S. 36.

(2) OGURA, K.: On the theory of representation of surfaces, Tôhoku Math. Journ. 12 (1917), S. 266.

Betrachten wir zwei Kreise $\mathfrak{K}$ und $\bar{\mathfrak{K}}$ in $R_3$ derart, dasz alle durch die Kreise gehenden Kugeln den gleichen Winkel miteinander bilden, so muss (8) von $\rho_\alpha$ unabhängig sein. Das ist nur dann möglich. wenn

$$\mathfrak{S}\, T^{\alpha\beta} \quad \text{prop.} \quad \mathfrak{S}\, A^{\alpha\beta}$$

ist. Aus (2) und (3) folgt

$$(9) \qquad \cos^2\varphi = \mathfrak{S}\, \rho_\alpha\rho_\beta T^{\alpha\beta} : \mathfrak{S}\, \rho_\alpha\rho_\beta A^{\alpha\beta} .$$

Nehmen wir einen Punkt $u$ als Linearkombination von $\mathfrak{x}^\alpha$ und $\dot{\mathfrak{x}}^\alpha$ $[\alpha=\mathrm{I}, \mathrm{II}]$, dann folgt[1]

$$(10) \qquad \begin{cases} 0 = \mathfrak{S}\, [\rho_\alpha\rho_\beta A^{\alpha\beta} + \rho_\alpha\rho_\beta B^{\alpha\beta} + \rho_\alpha\rho_\beta T^{\alpha}_{\beta}\} , \\ e^{i\varphi} = \mathfrak{S}\, \{\sqrt{T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta} + i\sqrt{(A^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta})\rho_\alpha\rho_\beta}\} . \end{cases}$$

Wir betrachten

$$(11) \qquad \begin{cases} \sum dx_i dy_i = G_{ij} du^i du^j , \\ \sum (dx_i)^2 = g_{ij} du^i du^j , \\ \sum (dy_i)^2 = g_{ij}\, du_i du^j \end{cases}$$

in meiner Arbeit,[2] und bilden

$$(12) \qquad P \equiv \frac{\sum dx_i dy_i}{\sum (dx_i)^2} = \frac{G_{ij} du^i du^j}{g_{ij} du^i du^j} ,$$

$$(13) \qquad P' \equiv \frac{\sum dx_i dy_i}{\sum (dy_i)^2} = \frac{G_{ij} du^i du^j}{g_{ij} du^i du^j} .$$

Eliminieren wir $du^1$, $du^2$ zwischen (12), (13) und

$$(14) \qquad C_1 (du^1) + 2\, C_2\, du^1 du^2 + C_3 (du^2)^2 = 0 ,$$

so gelten

$$(15) \qquad \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ G_{11} - P g_{11} & G_{12} - P g_{12} & G_{22} - P g_{22} \\ G_{11} - P' \bar{g}_{11} & G_{12} - P' \bar{g}_{12} & G_{22} - P' \bar{g}_{22} \end{vmatrix} = 0 ,$$

(1) Vgl. NAKAZIMA, S.: Differentialgeo. der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ., Vol. 34, S. 201.

(2) NAKAZIMA ( = MATUMURA = MATUMURA), S.: Differentialgeometrie der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ., Vol. 34 (1931) S. 191.

darin können wir weiter untersuchen wie in OGURAS Arbeit.[1]

Das gemeinsame Paar der beiden Involutionen

$$(16)\qquad G_{ij}du^i du^j = 0\,,\quad g_{ik}du^i du^j = 0$$

können wir im Punkte $\mathfrak{x}$ sowie im Punkte $\mathfrak{y}$ begreifen und wird durch

$$(17)\qquad \begin{vmatrix} (du^1)^2 & -du^1du^2 & (du^2)^2 \\ G_{22} & G_{12} & G_{11} \\ g_{22} & G_{12} & g_{11} \end{vmatrix} = 0$$

gegeben. Es gibt ${}_3C_2 = 3$ Paare der Kurven, die dadurch charakterisiert werden, dasz sie je ein gemeinsames Paar zweier der folgenden Involutionen bilden:

$$(18)\qquad G_{ij}du^i\delta u^j = 0\,,\quad g_{ij}du^i\delta u^j = 0\,,\quad \bar{g}_{ij}du^i\delta u^j = 0\,.$$

Setzt man allgemein folgende Bezeichnung fest

$$(19)\qquad \begin{vmatrix} (du^1)^2 & -du^1du^2 & (du^2)^2 \\ M_{22} & M_{12} & M_{11} \\ N_{22} & N_{12} & N_{11} \end{vmatrix} = (MN)\,,$$

so ist sie:

$$(20)\qquad (Gg) = 0\,,\quad (g\bar{g}) = 0\,,\quad (G\bar{g}) = 0\,.$$

(**F**) Wir betrachten drei Kreise $\mathfrak{K}$, $\bar{\mathfrak{K}}$ und $\bar{\bar{\mathfrak{K}}}$ in $R_3$, und $\varphi$ ist der Winkel zwischen $\mathfrak{y}$ und $\bar{\mathfrak{K}}$, $\bar{\varphi}$ der Winkel zwischen $\mathfrak{y}$ und $\bar{\bar{\mathfrak{K}}}$, wo $\mathfrak{y}$ die Kugel, die $\mathfrak{K}$ hindurchgeht, wo $\mathfrak{y} = \rho_\alpha \mathfrak{x}^\alpha$ ist

So kann man setzen[2]

$$(1)\qquad \cos^2\varphi = T^{11}\rho_1^2 + 2\,T^{12}\rho_1\rho_2 + T^{22}\rho_2^2\,,$$

$$(2)\qquad \cos^2\bar{\varphi} = \bar{T}^{11}\rho_1^2 + 2\,\bar{T}^{12}\rho_1\rho_2 + \bar{T}^{22}\rho_2^2\,.$$

Wenn

---

(1) OGURA, a.a. O., S. 266.

(2) NAKAZIMA (MATUMURA=MATSUMURA), S.: Differentialgeo. der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ. Vol. 34, S. 204.

$$(3)\qquad T^{11}\bar{T}^{12}-T^{12}\bar{T}^{11}=0,\quad T^{12}\bar{T}^{22}-T^{22}\bar{T}^{12}=0$$

gilt in (1), (2), so folgt

$$(4)\qquad T^{11}:T^{12}:T^{22}=\bar{T}^{11}:\bar{T}^{12}:\bar{T}^{22}.$$

Wenn

$$(5)\qquad T^{12}=\bar{T}^{12}=0$$

gilt in (1) und (2), so erfolgt

$$(6)\qquad \begin{cases}\cos^2\varphi=T^{11}\rho_{\mathrm{I}}^2+T^{22}\rho_2^2,\\ \cos^2\bar{\varphi}=\bar{T}^{11}\rho_{\mathrm{I}}^2+\bar{T}^{22}\rho_2^2.\end{cases}$$

In (1), (2) haben wir zwei quadratische Formen

$$(7)\qquad T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta,\quad \bar{T}^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta,$$

von denen die erste wegen $T>0$ sicher nicht ausgeartet ist.

Bekanntlich gilt nun der Satz, dass man solches Formenpaar immer durch eine lineare Transformation

$$(8)\qquad \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^\alpha=\sum_{\beta=1}^{\mathrm{II}}c_\beta^\alpha\mathfrak{x}^\beta\qquad [\alpha=\mathrm{I},\mathrm{II}]$$

in das Formenpaar

$$(9)\qquad \rho_{\mathrm{I}}^2+\rho_{\mathrm{II}}^2$$

und

$$(10)\qquad \bar{T}^{11}\rho_{\mathrm{I}}^2+\bar{T}^{22}\rho_{\mathrm{II}}^2$$

überführen kann, bei dem nur die reinquadratischen Glieder stehen bleiben, und zwar dies geht im allgemeinen auf eine und nur eine Art, allein im Falle

$$(11)\qquad \bar{T}^{\alpha\beta}\ \text{prop.}\ T^{\alpha\beta}$$

auf unendlich viele.

Schliessen wir den Fall

$$\bar{T}^{\alpha\beta}\ \text{prop.}\ T^{\alpha\beta}$$

aus, so können wir also auf eine und nur eine Art die Hilfskugeln $\mathfrak{y}$ durch $\mathfrak{K}$ annehmen, sodass

$$(12)\qquad \overline{T}^{\alpha\beta} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}, \qquad \overline{T}^{12} = 0$$

wird.

Ebenso können wir die Kugeln durch $\overline{\mathfrak{K}}$ bzw. $\overline{\overline{\mathfrak{K}}}$ auf nur eine Art so wählen, dass

$$(13)\qquad \overline{\overline{T}}^{\alpha\beta} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}, \qquad \overline{\overline{T}}^{12} = 0$$

bzw.

$$(14)\qquad \check{T}^{\alpha\beta} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}, \qquad \hat{T}^{12} = \ddot{o}$$

wird, wenn wir den Fall

$$(15)\qquad \overline{\overline{T}}^{\alpha\beta} \text{ prop. } \overline{\overline{T}}^{\alpha\beta}$$

bzw.

$$(16)\qquad \check{T}^{\alpha\beta} \text{ pryp. } \hat{T}^{12} = 0$$

ausschliesen.

(**G**) Es seien

$$(1)\qquad \mathfrak{K},\ \overline{\mathfrak{K}},\ \overline{\overline{\mathfrak{K}}}$$

drei Kreise in $R_3$.

Ist

$$(2)\qquad \mathfrak{y} = \rho_\alpha \mathfrak{x}^\alpha$$

eine Kugel durch $\mathfrak{K}$, so ist

$$(3)\qquad \cos^2\varphi = \rho_\alpha\rho_\beta T^{\alpha\beta},$$

wo $\varphi$ der Winkel zwischen $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{K}$ ist. Ist $\bar{\varphi}$ der Winkel zwischen $\mathfrak{y}$ und $\overline{\overline{\mathfrak{K}}}$, so gilt

$$(4)\qquad \cos^2\overline{\overline{\varphi}} = \rho_\alpha\rho_\beta \overline{\overline{T}}^{\alpha\beta}.$$

Ist $\varphi = \bar{\varphi}$, so folgt aus (3) und (4)

$$(5)\qquad T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta = \overline{T}^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta.$$

Ist (5) unabhängig von $\varphi_\alpha$, so muss

( 6 ) $\quad T^{\alpha\beta} = \overline{T}^{\alpha\beta}$

sein.

(**H**) $\mathfrak{K}$, $\overline{\mathfrak{K}}$ und $\overline{\overline{\mathfrak{K}}}$ seien drei Kreise in $R_n$ und $\mathfrak{y}$ eine normierte Kugel durch $\mathfrak{K}$ in $R_n$, so folgt

( 1 ) $\quad \cos^2\varphi = T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta, \quad \cos^2\overline{\varphi} = \overline{T}^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta,$

wo $\varphi$ der Winkel zwischen $\overline{\mathfrak{K}}$ und $\mathfrak{y}$, $\overline{\varphi}$ der Winkel zwischen $\overline{\overline{\mathfrak{K}}}$ und $\mathfrak{y}$ ist, da

( 2 ) $\quad (\mathfrak{y}\mathfrak{y}) = A^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta = 1$

gilt.

Sind die Werte von $\cos^2\varphi$, $\cos^2\overline{\varphi}$ gleich K bzw. $\overline{K}$, so folgt aus (1) und (2)

( 3 ) $\quad \begin{cases} (T^{\alpha\beta} - KA^{\alpha\beta})\,\rho_\alpha\rho_\beta = 0, \\ (\overline{T}^{\alpha\beta} - \overline{K}A^{\alpha\beta})\,\rho_\alpha\rho_\beta. \end{cases}$

Aus (3) können wir wissen, dasz

( 4 ) $\quad [\{T^{\alpha\beta} - KA^{\alpha\beta}\} + \lambda\,\{\overline{T}^{\alpha\beta} - \overline{K}A^{\alpha\beta}\}]\,\rho_\alpha\rho_\beta = 0$

gilt, wo $\lambda$ ein unbestimmtes Parameter ist.

Da ist $\overline{K}$ eine Funktion von K.

Unter den Kugeln in (4) gibt es die Kugel, deren Parameterwerte wir aus der Gleichung

( 5 ) $\quad |\,\{T^{\alpha\beta} - KA^{\alpha\beta}\} + \lambda\,\{\overline{T}^{\alpha\beta} - \overline{K}A^{\alpha\beta}\}\,| = 0$

in $\lambda$ bestimmen.

## ( 4 )

(**A**) Wir betrachten[1]

( 1 ) $\quad \mathfrak{x} = \xi - (\xi\eta)\,\eta\,.$

(1) THOMSEN, G.: Über konforme Geo.: Abh. aus dem Math. Seminar der Hamburgischen Univ. 4 Bd., S. 122.

Sind $\xi$, $\eta$ und $\mathfrak{x}$ die Kreise in $R_2$, so entsteht

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = (\xi\xi) + (\xi\eta)^2(\eta\eta) - 2(\xi\eta),$$

d. h.
$$1 = 1 - (\xi\eta)^2,$$

oder

$$(2) \qquad (\xi\eta) = 0,$$

so folgt der

**Satz:** *Sind* $\xi$, $\eta$ *und* $\mathfrak{x}$ *die Kreise in* (1), *so müssen* $\xi$ *und* $\eta$ *aufeinander senkrecht sein.*

(**B**) Sind $\xi$ und $\mathfrak{y}$ die Kreise, $\mathfrak{z}$ ein Punkt in $R_2$, so folgt[2]

$$(1) \qquad 1 = 4(\mathfrak{z}\xi)^2 - 4(\mathfrak{z}\eta)^2,$$

wo

$$(2) \qquad \mathfrak{y} = 2(\mathfrak{z}\xi)\xi - \mathfrak{z}.$$

So können wir wissen, dasz (1) *nicht besteht.*

Weiter können wir wissen, dasz

$$(3) \qquad \mathfrak{y} = 2(\mathfrak{z}\xi)\xi - \mathfrak{z}$$

nicht besteht, wenn $\xi$ und $\mathfrak{z}$ die Kreise und $\mathfrak{y}$ ein Punkt in $R_2$ ist.

(**C**) $\mathfrak{z}$ in

$$(1) \qquad \mathfrak{x} = (\xi\eta)\eta - \xi, \quad (\xi\eta)^2 = 1$$

bezeichnet den Berührungspunkt der zwei Kreise $\xi$ und $\eta$, denn aus (1) entsteht:

$$(2) \qquad (\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = (\xi\eta)^2(\eta\eta) + (\xi\eta) - 2(\xi\eta)^2 = 0,$$

$$(3) \qquad (\mathfrak{x}\xi) = (\xi\eta)^2 - (\xi\xi) = 0,$$

$$(4) \qquad (\mathfrak{x}\eta) = (\xi\eta)(\eta\eta) - (\xi\eta) = 0.$$

(**D**) Wir betrachten

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{z} - 2(\mathfrak{z}\xi)\xi,$$

(2) THOMSEN, a. a .O., S. 122.

so folgt

$$(\mathfrak{y}\xi) = -(\mathfrak{z}\,\xi),$$

d. h. $$\cos \widehat{\mathfrak{y}, \xi} = -\cos \widehat{\mathfrak{z}, \xi}\,.$$

Aus

$${}_{(1)}\mathfrak{y} = {}_{(1)}\mathfrak{z} - 2\,({}_{(1)}\mathfrak{z}\,\xi)\,\xi$$

und

$${}_{(2)}\mathfrak{y} = {}_{(2)}\mathfrak{z} - 2\,({}_{(2)}\mathfrak{z}\,\xi)\,\xi$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}(\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2) &= (\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2) + 4\,(\mathfrak{z}_1\mathfrak{z})\,(\mathfrak{z}_2\xi) - 2\,(\mathfrak{z}_1\xi)\,(\mathfrak{z}_2\xi) - 2\,(\mathfrak{z}_1\xi)\,(\mathfrak{z}_2\xi)\\ &= (\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2)\,,\end{aligned}$$

d. h. $$\cos \widehat{\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2} = \cos \widehat{\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2}\,,$$

wo $\mathfrak{y}$, $\xi$, $\mathfrak{z}$, ${}_{(1)}\mathfrak{z}$, ${}_{(2)}\mathfrak{z}$, ${}_{(1)}\mathfrak{y}$, $\mathfrak{y}_{(2)}$ die Kreise in $R_2$ sind.

(E) Wir betrachten

$$(1) \qquad \mathfrak{d} = 2\,(\mathfrak{g}\mathfrak{x})\,\mathfrak{p} - (\mathfrak{g}\mathfrak{p})\,\mathfrak{x}$$

und

$$(2) \qquad \mathfrak{w} = 2\,(\mathfrak{g}\mathfrak{x})\,\mathfrak{p} + (\mathfrak{g}\mathfrak{p})\,\mathfrak{x}\,,$$

wo $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{p}$ die Kreise in $R_2$ sind.

Aus (1) und (2) folgt

$$(3) \qquad (\mathfrak{d}\mathfrak{g}) = (\mathfrak{g}\mathfrak{x})\,(\mathfrak{p}\mathfrak{g})\,,$$

$$(4) \qquad (\mathfrak{w}\mathfrak{g}) = 3\,(\mathfrak{g}\mathfrak{x})\,(\mathfrak{p}\mathfrak{g})\,,$$

d. h. $$(\mathfrak{d}\mathfrak{g}) : (\mathfrak{w}\mathfrak{g}) = 1:3\,,$$

oder

$$(5) \qquad \cos \widehat{\mathfrak{d}, \mathfrak{g}} : \cos \widehat{\mathfrak{w}, \mathfrak{g}} = 1:3\,.$$

Wenn $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{x}$ aufeinander senkrecht sind, so folgt aus (1) und (2)

$$(6)\quad \begin{cases} (\mathfrak{v}\mathfrak{x}) = -(\mathfrak{g}\mathfrak{p}), & (\mathfrak{w}\mathfrak{x}) = (\mathfrak{g}\mathfrak{p}), \\ (\mathfrak{v}\mathfrak{p}) = -2(\mathfrak{g}\mathfrak{x}), & (\mathfrak{w}\mathfrak{p}) = 2(\mathfrak{g}\mathfrak{x}) \end{cases}$$

oder

$$(7)\quad \begin{cases} \cos\widehat{\mathfrak{v},\mathfrak{x}} = -\cos\widehat{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}, & \cos\widehat{\mathfrak{w},\mathfrak{x}} = \cos\widehat{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}, \\ \cos\widehat{\mathfrak{v},\mathfrak{p}} = 2\cos\widehat{\mathfrak{g},\mathfrak{x}}, & \operatorname{cor}\widehat{\mathfrak{w},\mathfrak{p}} = 2\cos\widehat{\mathfrak{g},\mathfrak{x}}. \end{cases}$$

(**F**) Wir betrachten

$$(1)\quad \mathfrak{y} = (\mathfrak{z}\xi)\,\xi + (\xi\eta)\,\eta,$$

so folgf

$$(2)\quad (\mathfrak{y}\xi) = (\mathfrak{z}\xi) + (\xi\eta)^2,$$

$$(3)\quad (\mathfrak{y}\eta) = (\xi\mathfrak{z})(\xi\eta) + (\xi\eta),$$

wo $\xi$, $\eta$, $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{y}$ die Kreise in $R_2$ sind.

Aus (2), (3) können wir wissen, dasz

$$(4)\quad (\mathfrak{y}\eta) = 0,$$

$$(5)\quad (\mathfrak{y}\xi) = (\mathfrak{z}\xi)$$

gelten.

Wenn $\xi$ und $\eta$ aufeinander senkrecht sind, so folgt der

**Satz:** *Wenn $\xi$ und $\eta$ aufeinander senkrecht sind, so sind $\mathfrak{y}$ und $\eta$ aufeinander senkrecht oder gilt*

$$\cos\phi_1 = \cos\phi_2,$$

*wo $\phi_1$ der Winkel zwischen $\mathfrak{y}$ und $\xi$, $\phi_2$ der Winkel zwischen $\mathfrak{z}$ und $\xi$ ist.*

(**G**) Wir betrachten

$$(1)\quad \mathfrak{y} = 2(\mathfrak{z}\xi)\,\xi - \mathfrak{z} - \xi,$$

wo $\xi$ und $\mathfrak{z}$ die Kreise in $R_2$ sind.

Aus (1) folgt

$$(2)\quad (\mathfrak{y}\mathfrak{z}) = (\mathfrak{z}\xi) - 1,$$

$$(3)\quad (\mathfrak{y}\mathfrak{y}) = 2\,\{1 - (\xi\mathfrak{z})\},$$

( 4 ) $(\mathfrak{y}\mathfrak{z}) = 2(\mathfrak{z}\xi)^2 - (\xi\mathfrak{z}) - 1$,

so können wir wissen, dasz $\mathfrak{y}$ ein Punkt ist, wenn $\xi$ und $\mathfrak{z}$ einander berühren.

Weiter können wir wissen, dasz in diesem Falle $\mathfrak{y}$ auf $\xi$ und $\mathfrak{z}$ liegt, d. h. $\mathfrak{y}$ der Berührungspunkt ist.

(**H**) Wir betrachten $\mathfrak{x}$ in

( 1 ) $\mathfrak{x} = \xi + \eta - (\xi\eta)\eta$,

wo $\xi$ und $\eta$ die Kreise in $R_2$ sind.

Aus (1) folgt

( 2 ) $(\xi\mathfrak{x}) = (\xi\eta)$,

( 3 ) $(\mathfrak{x}\eta) = 1$,

( 4 ) $(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = 1$,

so können wir wissen, dasz $\mathfrak{x}$ einen Kreis in $R_2$ bezeichnet und

( 5 ) $\cos\phi = \cos\psi$,

besteht, wo $\phi$ der Winkel zwischen $\xi$ und $\mathfrak{x}$, $\psi$ der Winkel zwischen $\xi$ und $\eta$ ist.

Weiter können wir wissen, dasz $\mathfrak{x}$ und $\eta$ einander berühren.

(**I**) Aus

( 1 ) $\mathfrak{x} = \xi - \eta - (\xi\eta)\eta, \quad (\xi\eta)^2 = 1$,

ergibt sich

( 2 ) $(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = 1$,

( 3 ) $(\mathfrak{x}\xi) = -(\eta\xi)$,

( 4 ) $(\mathfrak{x}\eta) = -1$,

wo $\xi$ unb $\eta$ zwei Kreise in $R_2$ sind.

Aus (2), (3) und (4) können wir wissen, dasz $\mathfrak{x}$ einen Kreis bezeichnet und

$$\cos\phi = -\cos\psi, \qquad \cos\varphi = \cos\pi$$

gelten, wo $\phi$ der Winkel zwischen $\mathfrak{x}$ und $\xi$, $\psi$ der Winkel zwischen $\eta$ und $\xi$, $\varphi$ der Winkel zwischen $\mathfrak{x}$ und $\eta$ ist.

(**J**) Aus

$$(1)\qquad \mathfrak{x} = (\xi\eta)\,\eta + (\eta\zeta)\,\zeta - \xi - \eta - \zeta, \quad (\xi\eta)^2 = 1, \quad (\eta\zeta)^2 = 1$$

folgt

$$(2)\qquad (\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = 1 - 2(\xi\eta)(\eta\zeta) - 2(\eta\zeta)(\xi\zeta) + 2(\xi\eta) + 2(\xi\zeta),$$

$$(3)\qquad (\xi\mathfrak{x}) = (\eta\zeta)(\xi\zeta) - (\xi\eta) - (\xi\zeta),$$

$$(4)\qquad (\eta\mathfrak{x}) = -(\zeta\eta)$$

wo $\xi$, $\eta$ und $\zeta$ die Kreise in $R_2$ sind.

Wenn

$$(\xi\eta) = 0, \quad (\eta\zeta) = 0, \quad (\xi\zeta) = 0$$

gelten, so erfolgen

$$(5)\qquad (\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = 1,$$

$$(6)\qquad (\xi\mathfrak{x}) = 0,$$

$$(7)\qquad (\eta\mathfrak{x}) = 0,$$

**Satz:** *Berühren die Kreise $\xi$, $\eta$; $\eta$, $\zeta$ und $\xi$, $\zeta$ einander, so berühren $\xi$, $\mathfrak{x}$ und $\eta$, $\mathfrak{x}$ auch einander.*

Ist $\mathfrak{x}$ ein Kreis, so folgt aus (2)

$$(8)\qquad (\xi\eta)(\eta\zeta) + (\eta\zeta)(\xi\zeta) = (\xi\eta) + (\xi\zeta).$$

Aus (8) können wir eine Winkelrelation, die zwischen den Kugeln besteht, finden.

(**K**) Aus

$$(1)\qquad \mathfrak{y} = (\mathfrak{z}\xi)\,\mathfrak{z} + (\eta\xi)\,\eta - \xi - \eta - \mathfrak{z}, \quad (\mathfrak{z}\xi)^2 = (\eta\xi)^2 = 1,$$

folgt

$$(2)\qquad (\mathfrak{y}\mathfrak{y}) = 1 + 2(\mathfrak{z}\xi)(\mathfrak{z}\eta)(\eta\xi) - 2(\mathfrak{z}\xi)(\mathfrak{z}\eta) - 2(\eta\xi)(\eta\mathfrak{z}) + 2(\eta\mathfrak{z}),$$

$$(3)\qquad (\xi\mathfrak{y}) = 1 - (\xi\eta) - (\xi\mathfrak{z}),$$

$$(4)\qquad (\mathfrak{z}\mathfrak{y}) = (\eta\xi)(\mathfrak{z}\eta) - (\mathfrak{z}\eta) - 1\,,$$

$$(5)\qquad (\eta\mathfrak{y}) = (\mathfrak{z}\xi)(\mathfrak{z}\eta) - (\eta\mathfrak{z}) - 1\,,$$

wo $\xi$, $\eta$, $\mathfrak{z}$ die Kreise in $R_2$ sind.

Aus (2) können wir wissen, dasz, wenn $\mathfrak{y}$ ein Kreis ist, so

$$(\eta\mathfrak{z}) + (\mathfrak{z}\xi)(\mathfrak{z}\eta)(\eta\xi) = (\mathfrak{z}\xi)(\mathfrak{z}\eta) + (\eta\xi)(\eta\mathfrak{z})\,,$$

d. h. $$\cos\phi_1 + \cos\phi_2\cos\phi_1\cos\phi_3 = \cos\phi_2\cos\phi_1 + \cos\phi_3\cos\phi_1$$

gilt, wo $\phi_1$ der Winkel zwischen $\eta$ und $\mathfrak{z}$, $\phi_2$ der Winkel zwischen $\mathfrak{z}$ und $\xi$, $\phi_3$ der Winkel zwischen $\eta$ und $\xi$ ist.

Aus (3), (4), (5) folgt

$$(6)\qquad (\xi\mathfrak{y}) = 1\,,\quad (\mathfrak{z}\mathfrak{y}) = -1\,,\quad (\eta\mathfrak{y}) = -1\,,$$

wenn

$$(7)\qquad (\xi\eta) = 0\,,\quad (\xi\mathfrak{z}) = 0\,,\quad (\mathfrak{z}\eta) = 0$$

sind.

Aus (6), (7) können wir eine Winkelrelation, die zwischen den Kugeln besteht, finden.

(L) Nachstehend untersuchen wir die Inversionsgeometrie in $R_2$.

Ist $\xi$ ein Kreis und $\mathfrak{z}$ ein nicht auf ihm liegender Punkt, so ist

$$(1)\qquad \bar{\mathfrak{z}} = 2(\mathfrak{z}\xi)\xi - \mathfrak{z}$$

der zu $\mathfrak{z}$ in bezug auf den Kreis $\xi$ inverse Punkt.

Der Berührungspunkt $\mathfrak{z}$ zweier Kreise $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ ist durch

$$(2)\qquad \mathfrak{z} = \mathfrak{p} - (\mathfrak{p}\mathfrak{q})\mathfrak{q}$$

gegeben.

Aus (1), (2) folgt

$$\begin{aligned}(3)\qquad \bar{\mathfrak{z}} &= 2\{\mathfrak{p} - (\mathfrak{p}\mathfrak{q})\mathfrak{q},\xi\}\xi - \mathfrak{p} + (\mathfrak{p}\mathfrak{q})\mathfrak{q}\\ &= \{2(\mathfrak{p}\xi)\xi - \mathfrak{p}\} - (\mathfrak{p}\mathfrak{q})\{2(\mathfrak{q}\xi)\xi - \mathfrak{q}\}\\ &= \{2(\mathfrak{p}\xi)\xi - \mathfrak{p}\} - \{2(\mathfrak{p}\xi)\xi - \mathfrak{p},\ 2(\mathfrak{q}\xi)\xi - \mathfrak{q}\}\{2(\mathfrak{q}\xi)\xi - \mathfrak{q}\}\\ &= \bar{\mathfrak{p}} - (\bar{\mathfrak{p}}\bar{\mathfrak{q}})\bar{\mathfrak{q}}\,,\end{aligned}$$

wo $\bar{\mathfrak{p}}$, $\bar{\mathfrak{p}}$ die Inverspunkte von $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{q}$ in bezug auf den Kreis $\xi$ sind.

Aus (3) folgt der

**Satz :** *Der Inverspunkt des Berührungspunktes zweier Kreise ist gleich dem Punkt des Berührungspunktes zweier Inverskreise.*

Weiter betrachten wir

$$\begin{cases} \bar{\mathfrak{p}} = 2(\mathfrak{p}\xi)\,\xi - \mathfrak{p}\,, & \overset{*}{\mathfrak{p}} = 2(\mathfrak{p}\mathrm{K})\,\mathrm{K} - \mathfrak{p}\,, \\ \bar{\mathrm{K}} = 2(\mathrm{K}\xi)\,\xi - \mathrm{K}\,, & \overset{*}{\mathfrak{p}} = 2(\bar{\mathfrak{p}}\bar{\mathrm{K}})\,\bar{\mathrm{K}} - \mathfrak{p} \end{cases}$$

anstatt (1), so folgt

$$\begin{aligned} \overset{*}{\mathfrak{p}} &= 2\,[2(\mathfrak{p}\xi)\,\xi - \mathfrak{p}, 2(\mathrm{K}\xi)\,\xi - \mathrm{K}]\;\{2(\mathrm{K}\xi)\,\xi - \mathrm{K}\} - 2(\mathfrak{p}\xi)\,\xi + \mathfrak{p} \\ &= 4(\mathfrak{p}\mathrm{K})(\mathrm{K}\xi)\,\xi - 2(\mathrm{K}\mathfrak{p})\,\mathrm{K} - 2(\mathfrak{p}\xi)\,\xi + \mathfrak{p}\,, \end{aligned}$$

wo K, $\bar{\mathrm{K}}$, $\xi$ die Kreise und $\mathfrak{p}$, $\bar{\mathfrak{p}}$, $\overset{*}{\mathfrak{p}}$, $\overset{*}{\bar{\mathfrak{p}}}$ die Punkte in $R_2$ sind.

Betrachten wir

$$(4) \qquad \bar{\mathrm{K}} = 2(\mathrm{K}\xi)\,\xi - \mathrm{K}$$

und

$$(5) \qquad \bar{\mathrm{K}}' = 2(\mathrm{K}'\xi)\,\xi - \mathrm{K}',$$

so folgt aus (4) und (5)

$$(6) \qquad \cos\alpha\cdot\bar{\mathrm{K}} + \sin\alpha\cdot\bar{\mathrm{K}}' = 2(\cos\alpha\cdot\mathrm{K} + \sin\alpha\cdot\mathrm{K}', \xi)\,\xi - \{\cos\alpha\cdot\mathrm{K} + \sin\alpha\cdot\mathrm{K}'\},$$

daraus können wir wissen, dasz *der Kreis*

$$\cos\alpha\cdot\mathrm{K} + \sin\alpha\cdot\mathrm{K}'$$

*in den Kreis*

$$\cos\alpha\cdot\bar{\mathrm{K}} + \sin\alpha\cdot\bar{\mathrm{K}}'$$

*durch die Inversion* übergeht.

Nehmen wir

$$\cos\alpha\cdot\xi + \sin\alpha\xi'$$

anstatt $\mathfrak{z}$ in

$$\bar{\mathfrak{z}} = 2(\mathfrak{z}\mathfrak{x})\,\mathfrak{x} - \mathfrak{z},$$

so folgt

$$\begin{aligned}\bar{\mathfrak{z}} &= 2(\cos\alpha\cdot\mathfrak{x} + \sin\alpha\cdot\mathfrak{x}', \mathfrak{x})\,\mathfrak{x} - \{\cos\alpha\cdot\mathfrak{x} + \sin\alpha\cdot\mathfrak{x}'\}\\ &= 2\cos\alpha\cdot\mathfrak{x} - \cos\alpha\cdot\mathfrak{x} - \sin\alpha\cdot\mathfrak{x}'\\ &= \cos\alpha\cdot\mathfrak{x} - \cos\alpha\cdot\mathfrak{x}'.\end{aligned}$$

Somit wissen wir, dasz sich

$$\cos\alpha\cdot\mathfrak{x} + \sin\alpha\cdot\mathfrak{x}'$$

durch die Inversion in bezug auf $\mathfrak{x}$ in

$$\cos\alpha\cdot\mathfrak{x} - \sin\alpha\cdot\mathfrak{x}'$$

transformiert.

Also können wir wissen, dasz sich der Kreis, der mit dem Ursprungskreis den Winkel $\alpha$ bildet, in den Kreis, der mit dem Ursprungskreis den Winkel $-\alpha$ bildet, transformiert.

Nehmen wir

$$\cos\alpha\cdot\mathfrak{x} + \sin\alpha\cdot\mathfrak{x}',\ \mathfrak{x}$$

anstatt $\mathfrak{x}$ bzw. $\mathfrak{z}$ in

$$\bar{\mathfrak{z}} = 2(\mathfrak{z}\mathfrak{x})\,\mathfrak{x} - \mathfrak{z},$$

so folgt

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned}\bar{\mathfrak{z}} &= 2(\mathfrak{x}, \cos\alpha\cdot\mathfrak{x} + \sin\alpha\cdot\mathfrak{x}')\{\cos\alpha\cdot\mathfrak{x} + \sin\alpha\cdot\mathfrak{x}'\} - \mathfrak{x}\\ &= 2\cos\alpha\cdot\{\cos\alpha\cdot\mathfrak{x} + \sin\alpha\cdot\mathfrak{x}'\} - \mathfrak{x}\\ &= 2\cos^2\alpha\cdot\mathfrak{x} + 2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}\\ &= \mathfrak{x}\cos 2\alpha + \mathfrak{x}'\sin 2\alpha,\end{aligned}\right.$$

so können wir wissen, dasz (7) der Inverskreis von $\mathfrak{x}$ in bezug auf

$$\cos\alpha\cdot\mathfrak{x} + \sin\alpha\cdot\mathfrak{x}'$$

ist.

Setzen wir $\mathfrak{x}'$ anstatt $\mathfrak{z}$ in

$$\bar{\mathfrak{z}} = 2(\mathfrak{z}\mathfrak{x})\,\mathfrak{x} - \mathfrak{z},$$

so entsteht

$$\bar{\mathfrak{z}} = -\xi',$$

so folgt der

**Satz:** $-\xi'$ *ist der Inverskreis von* $\xi'$ *in bezug auf* $\xi$.

Im folgenden betrachten wir den Fall, dasz $\mathfrak{z}$ und $\bar{\mathfrak{z}}$ zwei Punkte in (1) sind.

Geht ein Kreis $\rho$ die Punkte $\mathfrak{z}$ und $\bar{\mathfrak{z}}$ hindurch, so folgt aus (1)

$$(\rho\bar{\mathfrak{z}}) = 2(\mathfrak{z}\xi)(\rho\xi) - (\rho\mathfrak{z}),$$

d. h.

$$(8) \qquad 0 = 2(\mathfrak{z}\xi)(\rho\xi).$$

Aus (8) können wir wissen, dasz $\rho$ und $\xi$ aufeinander senkrecht sind oder $\mathfrak{z}$ auf $\xi$ liegt,

(**M**) Wir betrachten

$$(9) \qquad \mathfrak{x} = \xi - (\xi\eta)\eta.$$

Wenn ein Kreis $\zeta$ $\xi$ und $\eta$ berührt, so folgt

$$(10) \qquad (\xi\zeta) = 1, \quad (\eta\zeta) = 1.$$

Aus (9), (10) ergibt sich

$$(11) \qquad (\mathfrak{x}\zeta) = 0, \quad (\mathfrak{x}\zeta) = 2;$$

wir wissen, dasz $\mathfrak{x}$ auf $\zeta$ liegen kann.

Nehmen wir

$$\rho\mathfrak{x}^\alpha + \sigma\dot{\mathfrak{x}}^\alpha, \quad \mathfrak{x}^\beta \qquad [\alpha, \beta = \mathrm{I}, \mathrm{II}]$$

anstatt $\mathfrak{z}$ bzw. $\xi$ in (1), so gilt

$$(12) \qquad \begin{cases} \bar{\mathfrak{z}} = 2(\rho\mathfrak{x}^\alpha + \sigma\dot{\mathfrak{x}}^\alpha, \mathfrak{x}^\beta)\mathfrak{x}^\beta - \{\rho\mathfrak{x}^\alpha + \sigma\dot{\mathfrak{x}}^\alpha\} \\ \quad = 2\{\rho A^{\alpha\beta} + \sigma B^{\alpha\beta}\}\mathfrak{x}^\beta - \{\rho\mathfrak{x}^\alpha + \sigma\dot{\mathfrak{x}}^\alpha\} \\ \quad = 2\{\rho A^{\alpha\beta} + \sigma B^{\alpha\beta} - \rho:2\}\mathfrak{x}^\beta - \sigma\dot{\mathfrak{x}}^\alpha. \end{cases}$$

(12) ist der Inverspunkt in unserem Ealle, wo $\rho$, $\sigma$ die skalaren Gröszen sind.

Ist $\phi$ ein Kreis in $R_2$, so folgt aus (9)

$$(13)\qquad (\mathfrak{x}\phi) = (\xi\phi) - (\xi\eta)(\eta\phi)$$
$$= \cos\phi_1 \pm \cos\phi_2$$

wo $\phi_1$ der Winkel zwischen $\xi$ und $\phi$, $\phi_2$ der Winkel zwischen $\eta$ und $\phi$ ist.

Weiter betrachten wir zwei Punkte

$$(14)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = \xi - (\xi\,\eta)\,\eta\,, & (\xi\,\eta)^2 = 1\,, \\ \bar{\mathfrak{x}} = \bar{\xi} - (\bar{\xi}\,\bar{\eta})\,\bar{\eta}\,, & (\bar{\xi}\,\bar{\eta})^2 = 1\,, \end{cases}$$

wo $\xi$, $\eta$, $\bar{\xi}$ und $\bar{\eta}$ die Kreise in $R_2$ sind.

Aus (14) folgt

$$(15)\qquad (\mathfrak{x}\,\bar{\mathfrak{x}}) = (\xi\bar{\xi}) \pm (\bar{\xi}\eta) \pm (\xi\bar{\eta}) \pm (\bar{\eta}\eta)\,,$$

oder

$$(16)\qquad (\mathfrak{x}\,\bar{\mathfrak{x}}) = \cos\alpha \pm \cos\beta \pm \cos\gamma \pm \cos\delta\,,$$

wo $\alpha$ der Winkel zwischen $\xi$ und $\xi$, $\beta$ der Winkel zwischen $\bar{\xi}$ und $\eta$, $\gamma$ der Winkel zwischen $\xi$ und $\bar{\eta}$, $\delta$ der Winkel zwischen $\bar{\eta}$ und $\eta$ ist.

Wenn die Kreise $\xi$, $\bar{\xi}$, $\eta$ und $\bar{\eta}$ gegeben werden, so können wir aus (16) den Abstand $\sqrt{(\mathfrak{x}\,\bar{\mathfrak{x}})}$ zwischen $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ berechnen.

Gilt

$$(17)\qquad \mathfrak{x} = \bar{\mathfrak{x}}$$

in (14), so folgt

$$(18)\qquad \xi - \bar{\xi} = \eta - \bar{\eta}\,,$$

wenn

$$(19)\qquad (\xi\eta) = (\bar{\xi}\,\bar{\eta}) = 1$$

ist.

Aus (18) wissen wir, dasz der Kreis $\xi - \bar{\xi}$ dem Kreis $\eta - \bar{\eta}$ gleich ist.

Wenn

$$(20) \qquad (\xi\eta) = 1, \qquad (\bar{\xi}\bar{\eta}) = -1$$

anstatt (19) gilt, so erhalten wir

$$(21) \qquad \xi - \bar{\xi} = \eta + \bar{\eta}$$

anstatt (18).

(**N**) Bezeichnen wir Winkel, unter welchem der Kreis $(\mathfrak{b}, \bar{\mathfrak{b}})$ zur Kugel $\xi$ geneigt ist, mit V, so ist beweisbar, dasz

$$(1) \qquad \cos^2 V = (\xi\mathfrak{b})^2 + (\xi\bar{\mathfrak{b}})^2.$$

Sind $(\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}})$ $[(\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{a}}) = 0]$ und $(\mathfrak{b}, \bar{\mathfrak{b}})$ $[(\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{b}}) = 0]$ zwei Kreise und $(\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{b}}) = \bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{b}) = 0$, $\cos \omega = (\mathfrak{a}\mathfrak{b})$, $\cos \bar{\omega} = (\bar{\mathfrak{a}}\bar{\mathfrak{b}})$, so wird der Winkel V, unter welchem die Kugel

$$\xi = \mathfrak{a} \cos u + \bar{\mathfrak{a}} \sin u$$

den Kreis $(\mathfrak{b}, \bar{\mathfrak{b}})$ schneidet, durch

$$(2) \qquad \begin{cases} \cos^2 V = \cos^2 \omega \cos^2 u + \cos^2 \bar{\omega} \sin^2 u, \\ \sin^2 V = \sin^2 \omega \cos^2 u + \sin^2 \bar{\omega} \sin^2 u \end{cases}$$

gegeben.

Setzen wir

$$(3) \qquad \bar{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b}', \qquad \bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}',$$

so erfolgt der Fall von TAKASU.[1]

Weiter betrachten wir[2]

$$(4) \qquad \eta^{\alpha} = \mathfrak{x}^{\alpha} \cos \phi + \dot{\mathfrak{x}}^{\alpha} \sin \phi$$

und

$$(5) \qquad \eta^{\beta} = \mathfrak{x}^{\beta} \cos \phi + \dot{\mathfrak{x}}^{\beta} \sin \phi, \qquad [\alpha, \beta = \mathrm{I}, \mathrm{II}],$$

so entsteht

$$\mathfrak{a}^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta} \cos^2 \phi + 2 B^{\alpha\beta} \cos \phi \sin \phi + T^{\alpha\beta} \sin^2 \phi,$$

wo

---

(1) TAKASU, T.: Differentialgeometrie in den Kugelräumen, Tokyo, Bd. I, S. 364.

(2) Vgl. THOMSON, G.: Über konforme Geometrie II, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ., Vol. IV Bd., S. 132.

$$\mathfrak{a}^{\alpha\beta} = (\eta^\alpha \eta^\beta),\ A^{\alpha\beta} = (\mathfrak{x}^\alpha \mathfrak{x}^\beta),\ B^{\alpha\beta} = (\mathfrak{x}^\alpha \dot{\mathfrak{x}}^\alpha),\ T^{\alpha\beta} = (\dot{\mathfrak{x}}^\alpha \dot{\mathfrak{x}}^\beta)$$

sind.

(**O**) Ist $\mathfrak{x}$ der Berührungspunkt zweier Kreise $\xi$ und $\eta$ in $R_2$, so

$$\mathfrak{x} = \xi - (\mathfrak{x}\eta)\,\eta\,,$$

wo

$$(\mathfrak{x}, \xi + \eta) = (\mathfrak{x}, \xi - \eta) = 0$$

gilt; wir wissen, dasz zwei Kreise $\xi + \eta$ und $\xi - \eta$ den Punkt $\mathfrak{x}$ hindurch gehen.

Weiter gelten

$$(\xi, \xi + \eta) = 1 + (\xi\eta)\,, \qquad (\xi, \xi - \eta) = 1 - (\xi\eta)\,,$$
$$(\eta, \xi + \eta) = 1 + (\xi\eta)\,, \qquad (\eta, \xi - \eta) = (\xi\eta) - 1\,,$$

so erfolgen

$$\cos \widehat{\xi, \xi + \eta} = \cos \widehat{\eta, \xi + \eta}\,,$$
$$\cos \widehat{\xi, \xi - \eta} = -\cos \widehat{\eta, \xi - \eta}\,.$$

(**P**) Im folgenden erwähnen wir die Kreise in $R_2$.

Der Berührungspunkt $\mathfrak{x}$ ist durch

( 1 ) $\quad \mathfrak{x} = \xi - (\xi\eta)\,\eta\,,\ (\xi\eta)^2 = 1$

gegeben, wo $\xi$ und $\eta$ die Kreise in $R_2$ sind.

Durch $\dot{\xi}$ ist der Berührungspundt von $\xi$ mit $\xi + \dot{\xi}\,dt$ dargestellt, wo (2) $(\dot{\xi}\dot{\xi}) = 0$ gilt.

Wenn (1) und (2) gültig sind, so erfolgen[1]

( 3 ) $\quad \dot{\xi} = \xi - (\xi\eta)\,\eta\,,\quad (\xi\eta)^2 = 1\,,\quad (\dot{\xi}\dot{\xi}) = 0\,.$

Wenn in (3) $\xi$ und $\eta$ vertauschbar sind, so bekommen wir

( 4 ) $\quad \dot{\eta} = \eta - (\xi\eta)\,\xi\,,\quad (\xi\eta)^2 = 1\,,\quad (\dot{\eta}\dot{\eta}) = 0\,.$

Aus (3), (4) ergibt sich

( 5 ) $\quad \{\dot{\xi} + \dot{\eta}\} = \{\xi + \eta\} - (\xi\eta)\,\{\xi + \eta\}\,.$

(1) THOMSEN, G.: Über konforme Geometrie II, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ. IV Bd, S. 122 und 126.

(5) ist *die Bedingung in unsrem Falle.*

Liegt der Punkt $\mathfrak{x}$ in

$$(6) \qquad \mathfrak{x} = \xi - (\xi\eta)\,\eta$$

auf dem Kreis $\zeta$, so folgt

d. h.

$$(7) \qquad (\mathfrak{x}\zeta) = 0$$

$$(8) \qquad (\xi\zeta) - (\xi\eta)(\eta\zeta) = 0\,.$$

Gilt

$$(9) \qquad (\xi\zeta) = 0$$

in (8), so entsteht

$$(10) \qquad (\eta\zeta) = 0\,;$$

somit folgt der

**Satz:** *Sind* $\zeta$ *und* $\xi$ *aufeinander senkrecht, so müssen* $\eta$ *und* $\zeta$ *aufeiuander senkrecht sein.*

Sind

$$(\xi\zeta) = 1\,, \quad (\eta\zeta) = 1$$

in

$$(\xi\zeta) - (\xi\eta)(\eta\zeta) = 0\,,$$

so erfolgt

$$(\xi\eta) = 1\,.$$

Bestehen

$$(\xi\zeta) = 1\,, \qquad (\eta\zeta) = -1\,,$$

oder

$$(\xi\zeta) = -1\,, \qquad (\eta\zeta) = 1\,,$$

so ist zu bekommen

$$(\xi\eta) = -1\,.$$

Somit folgt der

**Satz:** *Berühren $\xi$ und $\eta$ einander, so müssen $\dot{\xi}$ und $\dot{\eta}$ auch einander berühren.*

Ber Berührungspunkt $\mathfrak{d}$ zweier Kreise $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ ist mit

$$(11) \qquad \mathfrak{d} = \mathfrak{x} - (\mathfrak{x}\mathfrak{y})\,\mathfrak{y}\,, \qquad (\mathfrak{x}\mathfrak{y})^2 = 1$$

gegeben.

Berühren sich zwei Kreise $\xi$ und $\eta$ in $\mathfrak{d}$, so erfolgt

$$(12) \qquad \mathfrak{d} = \xi - (\xi\eta)\,\eta\,.$$

Aus (11), (12) ergibt sich

$$(13) \qquad \mathfrak{x} - (\mathfrak{x}\mathfrak{y})\,\mathfrak{y} = \xi - (\xi\eta)\,\eta$$

d. h.

$$(14) \qquad 0 = \{\xi - \mathfrak{x}\} - \{(\xi\eta)\,\eta - (\mathfrak{x}\mathfrak{y})\,\mathfrak{y}\}\,.$$

(14) ist die Bedingung in unsrem Falle.

Liegt $\mathfrak{x}$ in (1) auf einem Kreise $\zeta$, so erfolgt

$$(15) \qquad 0 = (\zeta\mathfrak{x}) = (\zeta\xi) - (\xi\eta)\,(\zeta\eta)$$

d. h.

$$(16) \qquad (\zeta\xi) = (\xi\eta)\,(\zeta\eta)$$

oder

$$(17) \qquad \cos\phi_1 = \pm\cos\phi_2\,,$$

wo $\phi_1$ der Winkel zwischen $\zeta$ und $\xi$, $\phi_2$ der Winkel zwischen $\zeta$ und $\eta$ ist.

(**Q**) Der Berührungspunkt $\mathfrak{d}$ zweier Kreise $\xi$ und $\eta$ ist durch

$$(1) \qquad \mathfrak{d} = \xi - (\xi\eta)\,\eta\,, \qquad (\xi\eta)^2 = 1$$

gegeben.

Sind $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ zwei Kreise in $R_3$ so bezeichnet $\mathfrak{w}$ in

$$(2) \qquad \mathfrak{w} = \mathfrak{x} - (\mathfrak{x}\mathfrak{y})\,\mathfrak{y}\,, \quad (\mathfrak{x}\mathfrak{y})^2 = 1$$

den Berührungspunkt von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$.

Aus (1), (2) folgt

$$(3) \qquad (\mathfrak{v}\mathfrak{w}) = (\xi\mathfrak{x}) - (\xi\eta)(\mathfrak{x}\eta) - (\mathfrak{x}\mathfrak{y})(\xi\mathfrak{y}) + (\xi\eta)(\mathfrak{x}\mathfrak{y})(\eta\mathfrak{y}).$$

Wenn

$$(4) \qquad (\mathfrak{v}\mathfrak{w}) = 1, \qquad (\xi\mathfrak{x}) = 1,$$

so folgt aus (3)

$$(5) \qquad (\xi\eta)(\mathfrak{x}\eta) + (\mathfrak{x}\mathfrak{y})(\xi\mathfrak{y}) = (\xi\eta)(\mathfrak{x}\mathfrak{y})(\eta\mathfrak{y}).$$

(5) ist die Bedingung dafür, dasz $\xi$ und $\mathfrak{x}$ einander berühren und der Abstand zwischen $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ gleich I ist.

Wenn

$$(6) \qquad (\xi\mathfrak{x}) = 0, \quad (\xi\mathfrak{y}) = 0,$$

so folgt aus (3)

$$(7) \qquad (\mathfrak{v}\mathfrak{w}) = -(\xi\eta)(\mathfrak{x}\eta) \pm (\eta\mathfrak{y}),$$

daraus folgt der

**Satz:** *Berührt* $\xi$ $\mathfrak{z}$ *und* $\mathfrak{y}$, *so erfolgt* (5).

(**R**) Liegt der Punkt $\mathfrak{x}$ in

$$\mathfrak{x} = \xi - (\xi\eta)\eta$$

auf zwei Kreisen $\zeta$ und $\rho$, so erfolgen

$$0 = (\zeta\mathfrak{x}) = (\zeta\xi) - (\xi\eta)(\zeta\eta),$$

$$0 = (\rho\mathfrak{x}) = (\rho\xi) - (\xi\eta)(\rho\eta),$$

oder

$$(\zeta\xi) = (\xi\eta)(\zeta\eta), \quad (\rho\xi) = (\xi\eta)(\rho\eta),$$

d. h.

$$\frac{(\zeta\xi)}{(\rho\xi)} = \frac{(\zeta\eta)}{(\rho\eta)}$$

oder

$$\frac{\cos\phi_1}{\cos\phi_2} = \frac{\cos\psi_1}{\cos\psi_2},$$

wo $\phi_1$ der Winkel zwischen $\varphi$ und $\xi$, $\phi_2$ der Winkel zwischen $\rho$ und

$\xi$, $\psi_1$ der Winkel zwischen $\zeta$ und $\eta$, $\psi_2$ der Winkel zwischen $\rho$ und $\eta$ ist.

(S) Der Berührungspunkt $\mathfrak{x}$ ist durch

$$(1) \qquad \mathfrak{x} = \xi - (\xi\eta)\,\eta, \quad (\xi\eta)^2 = 1$$

gegeben, wo $\xi$ und $\eta$ zwei Kreise in $R_2$ sind.

Ist $\mathfrak{v}$ ein Punkt in $R_2$, so folgt aus (1)

$$(2) \qquad (\mathfrak{v}\mathfrak{x}) = (\xi\mathfrak{v}) - (\xi\eta)(\eta\mathfrak{v}).$$

Liegt $\mathfrak{v}$ auf $\eta$, so folgt aus (2)

$$(3) \qquad (\mathfrak{v}\mathfrak{x}) = (\xi\mathfrak{v}),$$

wo $\sqrt{(\mathfrak{v}\mathfrak{x})}$ den Abstand zwischen zwei Punkten $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{x}$ bedeutet.

So folgt der

**Satz:** *In unserem Falle bedeutet $\sqrt{(\xi\mathfrak{v})}$ den Abstand zwischen zwei Punkten $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{x}$.*

Liegt $\mathfrak{v}$ auf $\xi$, so folgt aus (2)

$$(4) \qquad (\mathfrak{v}\mathfrak{x}) = -(\xi\eta)(\eta\mathfrak{v}),$$

somit

$$(5) \qquad (\eta\mathfrak{v}) = (\mathfrak{v}\mathfrak{x})$$

oder

$$(6) \qquad (\eta\mathfrak{v}) = -(\mathfrak{v}\mathfrak{x}).$$

(T) Wir betrachten

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathfrak{v} = \mathfrak{x}^{\alpha} - (\mathfrak{x}^{\alpha}\mathfrak{y}^{\alpha})\,\mathfrak{y}^{\alpha}, \\ u = \mathfrak{x}^{\beta} + \dot{\mathfrak{x}}^{\beta}, \qquad [\alpha, \beta = \mathrm{I}, \mathrm{II}], \end{cases}$$

wo $u$, $\mathfrak{v}$ die Punkte in $R_2$, $\mathfrak{x}^{\alpha}$ der Kreis in $R_2$ ist.

Aus (1) folgt

$$(2) \qquad \begin{cases} (u\mathfrak{v}) = A^{\alpha\beta} - (\mathfrak{x}^{\alpha}\mathfrak{y}^{\beta})^2 + B^{\alpha\beta} + (\mathfrak{x}^{\alpha}\mathfrak{y}^{\beta})(\dot{\mathfrak{x}}^{\alpha}\mathfrak{y}^{\beta}) \\ \qquad = A^{\alpha\beta} - (H^{\alpha\beta})^2 + B^{\alpha\beta} + H^{\alpha\beta}K^{\alpha\beta} \\ \qquad = A^{\alpha\beta} + B^{\alpha\beta} + H^{\alpha\beta}\{K^{\alpha\beta} - H^{\alpha\beta}\}, \end{cases}$$

wo $(\mathfrak{x}^\alpha \mathfrak{y}^\beta) \equiv \mathrm{H}^{\alpha\beta}$, $(\dot{\mathfrak{x}}^\alpha \mathfrak{y}^\beta) \equiv \mathrm{K}$ gesetzt sind. $\mathrm{A}^{\alpha\beta}$ und $\mathrm{B}^{\alpha\beta}$ stehen in meiner Arbeit.[1]

Aus (2) können wir den Abstand $\sqrt{(u\mathfrak{v})}$ zwischen $u$ und $\mathfrak{v}$ berechnen.

(U) Wir betrachten

$$(1)\qquad u = \alpha\mathfrak{x}^\alpha + \beta\dot{\mathfrak{x}}^\alpha + \gamma\ddot{\mathfrak{x}}^\alpha,$$

wo $\mathfrak{x}$ die Kugel in $\mathrm{R}_n$ ist.

Aus (1) folgt

$$(2)\qquad (uu) = \alpha^2\mathrm{A}^{\alpha\beta} + \beta^2\mathrm{T}^{\alpha\beta} + \gamma^2\mathrm{V}^{\alpha\beta} + \alpha\beta\mathrm{B}^{\alpha\beta} + \alpha\gamma\mathrm{C}^{\alpha\beta} + \beta\gamma\mathrm{D}^\alpha_\beta, \qquad [\alpha, \beta = \mathrm{I}, \mathrm{II}],$$

wo

$$(3)\qquad \begin{cases} (\mathfrak{x}^\alpha\mathfrak{x}^\beta) = \mathrm{A}^{\alpha\beta}, & (\mathfrak{x}^\alpha\dot{\mathfrak{x}}^\beta) = \mathrm{B}^{\alpha\beta}, \quad (\dot{\mathfrak{x}}^\alpha\dot{\mathfrak{x}}^\beta) = \mathrm{T}^{\alpha\beta} \\ (\ddot{\mathfrak{x}}^\alpha\ddot{\mathfrak{x}}^\beta) = \mathrm{V}^{\alpha\beta}, & (\mathfrak{x}^\alpha\ddot{\mathfrak{x}}^\beta) = \mathrm{C}^{\alpha\beta}, \quad (\dot{\mathfrak{x}}^\alpha\ddot{\mathfrak{x}}^\beta) = \mathrm{D}^{\alpha\beta} \end{cases}$$

bestehen.

Nun betrachten wir drei Systeme

$$(4)\qquad \begin{cases} s_i = \mathrm{A}_i x^2 + \mathrm{A}'_i y^2 + \mathrm{A}''_i z^2 + 2\,\mathrm{B}_i yz + 2\,\mathrm{B}'_i zx + 2\mathrm{B}''_i xy, \\ \qquad\qquad [i = 1, 2, 3] \\ (uu) = s, \ \mathrm{A}_i = \mathrm{A}^{\alpha\beta}, \ \alpha = x, \ \mathrm{A}'_i = \mathrm{T}^{\alpha\beta}, \ \beta = y, \ \mathrm{A}''_i = \mathrm{V}^{\alpha\beta}, \\ \gamma = z, \qquad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

von (2) und setzen

$$(5)\qquad \begin{cases} s_i \equiv \mathrm{A}_i x^2 + \mathrm{A}'_i y^2 + \mathrm{A}''_i z^2 + 2\,\mathrm{B}_i yz + 2\,\mathrm{B}'_i zx + 2\,\mathrm{B}''_i xy, \\ a_i = \mathrm{A}'_i\mathrm{A}''_i - \mathrm{B}_i^2, \ a'_i = \mathrm{A}''_i\mathrm{A}_i - \mathrm{B}'^2_i, \ a''_i = \mathrm{A}_i\mathrm{A}'_i - \mathrm{B}''^2_i, \\ b_i = \mathrm{B}'_i\mathrm{B}''_i - \mathrm{A}_i\mathrm{B}_i, \ b'_i = \mathrm{B}''_i\mathrm{B}_i - \mathrm{A}'_i\mathrm{B}'_i, \ b''_i = \mathrm{B}_i\mathrm{B}'_i - \mathrm{A}''_i\mathrm{B}''_i, \\ \theta_{ij} = a_i\mathrm{A}_j + a'_i\mathrm{A}'_j + a''_i\mathrm{A}''_j + 2b_i\mathrm{B}_j + 2b'_i\mathrm{B}'_j + 2b''_i\mathrm{B}''_j; \\ \Delta_i = \begin{vmatrix} \mathrm{A}_i & \mathrm{B}''_i & \mathrm{B}'_i \\ \mathrm{B}''_i & \mathrm{A}'_i & \mathrm{B}_i \\ \mathrm{B}'_i & \mathrm{B}_i & \mathrm{A}''_i \end{vmatrix}, \end{cases}$$

(1) Vergl. NAKAZIMA (=MATUMURA=MATSUMURA), S.: Kugelgeo. von MÖBIUS, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univi, Vol. 2, S. 36.

so zerlegen sich

$$(6) \qquad s_i + \lambda s_j = 0, \qquad [i, j = 0, 1, 2]$$

in zwei lineare Faktoren, wenn

$$(7) \qquad \Delta_i + \lambda\theta_{ij} + \lambda^2\theta_{ji} + \lambda^3\Delta_j = 0$$

besteht.

(**V**) $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ seien zwei senkrechte Kugeln in $R_3$, so bezeichnet

$$(1) \qquad \eta = \tfrac{1}{2}\{\mathfrak{x} + \mathfrak{y}\}$$

eine Kugel in $R_3$, denn

$$(2) \qquad (\eta\eta) = 1$$

gilt.

Aus (1) folgt

$$(3) \qquad (\eta\mathfrak{x}) = \tfrac{1}{2} = (\eta\mathfrak{y}),$$

d. h.

$$(4) \qquad \cos\phi_1 = \tfrac{1}{2} = \cos\phi_2.$$

wo $\phi_1$ der Winkel zwischen $\eta$ und $\mathfrak{x}$, $\phi_2$ der Winkel zwischen $\eta$ und $\mathfrak{y}$ ist.

$$(5) \qquad \mathfrak{y} = 2(\tfrac{1}{2}[\mathfrak{x} + \mathfrak{y}], \mathfrak{x})\,\mathfrak{x} - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{x} + \mathfrak{y})$$

ist der zu $\frac{1}{2}[\mathfrak{x} + \mathfrak{y}]$ in bezug auf die Kugel $\mathfrak{x}$ inverse Kugel.

Aus (5) folgt

$$(6) \qquad \mathfrak{y} = \mathfrak{x} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{x} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{y} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{x} - \mathfrak{y}).$$

(**W**) Wenn $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ vier Punkte in $R_3$, die Berührungspunkte der Kugeln ${}_{(1)}\xi$, ${}_{(1)}\eta$; ${}_{(2)}\xi$, ${}_{(2)}\eta$; ${}_{(3)}\xi$, ${}_{(3)}\eta$ bzw. ${}_{(4)}\xi$, ${}_{(4)}\eta$ sind, so entsteht

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathfrak{A} = {}_{(1)}\xi - ({}_{(1)}\xi{}_{(1)}\eta)\,{}_{(1)}\eta, \\ \mathfrak{B} = {}_{(2)}\xi - ({}_{(2)}\xi{}_{(2)}\eta)\,{}_{(2)}\eta, \\ \mathfrak{C} = {}_{(3)}\xi - ({}_{(3)}\xi{}_{(3)}\eta)\,{}_{(3)}\eta, \\ \mathfrak{S} = {}_{(4)}\xi - ({}_{(4)}\xi{}_{(4)}\eta)\,{}_{(4)}\eta. \end{cases}$$

Die Bedingung, dasz die Endpunkte A, B, C, D von vier Ortsvektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ in einer Ebene liegen, ist die

$$(2) \qquad a\mathfrak{A} + a\mathfrak{B} + c\mathfrak{C} + d\mathfrak{D} = 0$$

mit der Nebenbedingung

$$(3) \qquad a + b + c + d = 0,$$

wo $a$, $b$, $c$ und $d$ skalare Gröszen sind.

Ohne Verwendung der Parameter läszt sich die Gleichung der Ebene durch drei Punkte A, B, C in die Form

$$(4) \qquad [\mathfrak{r} - \mathfrak{A},\ \mathfrak{B} - \mathfrak{A},\ \mathfrak{C} - \mathfrak{A}] = 0$$

oder

$$(5) \qquad [\mathfrak{r}\mathfrak{B}\mathfrak{C}] + [\mathfrak{r}\mathfrak{C}\mathfrak{A}] + [\mathfrak{r}\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = [\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}],$$

d. h.

$$(6) \qquad \begin{cases} [\mathfrak{r} - {}_{(1)}\xi + ({}_{(1)}\xi_{(1)}\eta)\,{}_{(1)}\eta, \\ \quad {}_{(2)}\xi - ({}_{(2)}\xi_{(2)}\eta)\,{}_{(2)}\eta - {}_{(1)}\xi + ({}_{(1)}\xi_{(1)}\eta)\,{}_{(1)}\eta, \\ \quad {}_{(3)}\xi - ({}_{(3)}\xi_{(3)})\,{}_{(3)}\eta - {}_{(1)}\xi - ({}_{(1)}\xi_{(1)}\eta)\,{}_{(1)}\eta] = 0 \end{cases}$$

bringen, wo $\mathfrak{r}$ der Ortsvektor eines Punktes der Ebenen A, B und C ist, da

$$(7) \qquad \mathfrak{r} = a\mathfrak{A} + b\mathfrak{B} + c\mathfrak{C}$$

gilt.

Weiter können wir wissen, dass

$$(8) \qquad (\mathfrak{a}\mathfrak{B}\mathfrak{C}) = 0,$$

d. h.

$$(9) \qquad [{}_{(1)}\xi - ({}_{(1)}\xi_{(1)}\eta)\,{}_{(1)}\eta,\ {}_{(2)}\xi - ({}_{(2)}\xi_{(2)})\,{}_{(2)}\eta,\ {}_{(3)}\xi - ({}_{(3)}\xi_{(3)}\eta)\,{}_{(3)}\eta) = 0$$

die notwendige und hinreichende Bedingung ist für die lineare Abhängigkeit:

$$(10) \qquad a\mathfrak{A} + b\mathfrak{B} + c\mathfrak{C} = 0$$

oder

$$a\,[{}_{(1)}\xi - ({}_{(1)}\xi_{(1)}\eta)\,{}_{(1)}\eta] + b\,[{}_{(2)}\xi - ({}_{(2)}\xi_{(2)}\eta)\,{}_{(2)}\eta] \\ + c\,[{}_{(3)}\xi - ({}_{(3)}\xi_{(3)}\eta)\,{}_{(3)}\eta] = 0.$$

Ist $\mathfrak{x}$ eine Kugel und $\mathfrak{z}$ ein nicht auf ihm liegender Punkt in $R_3$, so ist

$$(11) \qquad \mathfrak{y} = (\mathfrak{z}\,\mathfrak{x})\,\mathfrak{x} - \mathfrak{z}$$

der zu $\mathfrak{z}$ in bezug auf die Kugel $\mathfrak{x}$ inverse Punkt.

Wir betrachten die räumliche Kurve

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{y}\,(t)\,,$$

wo $t$ der Parameter ist.

Das sich über eine Kurvenlänge mit den Endpunkten $t = a$ und $t = b$ erstreckende Integral

$$(12) \qquad s = \int_a^b \sqrt{(\mathfrak{y}')^2}\,dt$$

oder

$$(13) \qquad s = \int_a^b \sqrt{\{2\,(\mathfrak{z}'\mathfrak{x})\,\mathfrak{x} - \mathfrak{z}'\}^2}\,dt$$

wird als die Bogenlänge unserer Kurve bezeichnet.

Die Striche deuten dabei die Ableitungen nach $t$ an.

Für den Bogen als Parameter ist nach (12) kennzeichend

$$(14) \qquad (\mathfrak{y}')^2 = 1\,,$$

d. h.

$$(15) \qquad \{2\,(\mathfrak{z}'\mathfrak{x})\,\mathfrak{x} - \mathfrak{z}'\}^2 = 1\,.$$

Als die Grenzlage der Sehne ergibt sich so die Tangente, die mittels eines Parameters $\mathfrak{r}$ folgendermaszen dargestellt werden kann:

$$(16) \qquad \bar{\mathfrak{z}} = \mathfrak{y} + \mathfrak{r}\,\mathfrak{y}'$$

oder

$$(17) \qquad (\bar{\mathfrak{z}} - \mathfrak{y},\ \mathfrak{y}',\ \mathfrak{y}'') = 0$$

oder

$$(18) \qquad [\bar{\mathfrak{z}} - 2\,(\mathfrak{z}\mathfrak{x})\,\mathfrak{x} + \mathfrak{z},\ 2\,(\mathfrak{z}'\mathfrak{x})\,\mathfrak{x} - \mathfrak{z}',\ 2\,(\mathfrak{z}''\mathfrak{x})\,\mathfrak{x} - \mathfrak{z}''] = 0\,.$$

Dies ist die Gleichung der Schmiegebene.

Nehmen wir jetzt die Bogenlänge als Kurvenparameter

$$(19)\qquad \mathfrak{y} = \mathfrak{y}(s), \quad \mathfrak{y}'^2 = 1,$$

so wird

$$(20)\qquad \mathfrak{y}'\mathfrak{y}'' = 0,$$

oder

$$(21)\qquad [2(\mathfrak{z}'\xi)\xi - \mathfrak{z}', \; 2(\mathfrak{z}''\xi)\xi - \mathfrak{z}''] = 0.$$

Wir bezeichnen die Krümmung mit $1/\rho$, so finden wir

$$(22)\qquad 1/\rho = \sqrt{(\mathfrak{y}'')^2},$$

oder

$$(23)\qquad 1/\rho = \sqrt{\{2(\mathfrak{z}''\xi)\xi - \mathfrak{z}''\}^2}.$$

Aus

$$(24)\qquad (\mathfrak{y}')^2 = 0$$

oder

$$(25)\qquad \{2(\mathfrak{z}'\xi)\xi - \mathfrak{z}'\}^2 = 0$$

folgt nämlich jetzt nicht mehr

$$(26)\qquad \mathfrak{y}' = 0$$

oder

$$(27)\qquad 2(\mathfrak{z}'\xi)\xi - \mathfrak{z}' = 0.$$

Die durch

$$(28)\qquad \mathfrak{y}'^2 = 0, \quad \mathfrak{y}' \neq 0$$

oder

$$(29)\qquad \{2(\mathfrak{z}'\xi)\xi - \mathfrak{z}'\}^2 = 0, \quad 2(\mathfrak{z}'\xi)\xi - \mathfrak{z}' \neq 0$$

gezeichneten imaginaren Kurven pflegt man isotrope Kurven oder auch Minimallinien zu nennen.

Nun setzen wir

$$(30)\qquad \mathfrak{y} = \mathfrak{y}(u, v)$$

oder

$$(31) \qquad \mathfrak{y} = 2\,(\mathfrak{z}\,(u, v)\,\xi)\,\xi - \mathfrak{z}\,(u, v)\,,$$

wo $u, v$ die Parameter sind.

Dann ist der Einheitsvektor der Flächennormalen

$$(32) \qquad \xi = \frac{\mathfrak{y}_u \times \mathfrak{y}_v}{\sqrt{(\mathfrak{y}_u \times \mathfrak{y}_v)^2}}$$

oder

$$(33) \qquad \xi = \frac{\{2\,(\mathfrak{z}_u\xi)\,\xi - \mathfrak{z}_u\} \times \{2\,(\mathfrak{z}_v\xi)\,\xi - \mathfrak{z}_v\}}{\sqrt{[\{2\,(\mathfrak{z}_u\xi)\,\xi - \mathfrak{z}_u\} \times \{2\,(\mathfrak{z}_v\xi)\,\xi - \mathfrak{z}_v\}]^2}}\,.$$

Für die Bogenlänge $s$ unserer durch

$$(34) \qquad u = u\,(t)\,, \quad v = v\,(t)$$

gegebenen Kurve erhalten wir die Formel

$$(35) \qquad \begin{cases} s = \displaystyle\int \sqrt{\left(\frac{d\mathfrak{y}}{dt}\right)^2}\, dt \\[2ex] \quad = \displaystyle\int \sqrt{\mathfrak{y}_u^2 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\,(\mathfrak{y}_u \mathfrak{y}_v)\,\frac{du}{dt}\,\frac{dv}{dt} + \mathfrak{y}_v^2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt \end{cases}$$

oder

(36)

$$s = \int \sqrt{\{2\,(\mathfrak{z}_u\xi)\,\xi - \mathfrak{z}_u\}^2 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\,\{2\,(\mathfrak{z}_u\xi)\,\xi - \mathfrak{z}_u\}\,\{2\,(\mathfrak{z}_v\xi)\,\xi - \mathfrak{z}_v\}\,\frac{du}{dt}\,\frac{dv}{dt} + \{2(\mathfrak{z}_v\xi)\,\xi - \mathfrak{z}_v\}^2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt\,.$$

Weiter können wir untersuchen wie in der elementaren Differentialgeometrie.

(**X**)

$$(1) \qquad \mathfrak{x}^\alpha \ [\alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}]$$

bezeichnet zwei Puhkte in $R_3$, wo $\mathfrak{x}^\alpha$ drei Kugeln in $R_3$ sind,

Wenn zwei Punkte $\mathfrak{x}^\alpha$ auf einer Kugel $\mathfrak{y}$ liegen, so entsteht

$$(2) \qquad \mathfrak{y} = \alpha\mathfrak{x}^{\mathrm{I}} + \beta\mathfrak{x}^{\mathrm{II}} + \gamma\mathfrak{x}^{\mathrm{III}}\,,$$

wo $\alpha, \beta, \gamma$ die skalaren Gröszen sind.

(2) ist die Bedingung dafür, dasz eine Gerade $\mathfrak{G}$, die von zwei Punkten $\mathfrak{x}^\alpha$ bestimmt wird, auf eine Kugel $\mathfrak{y}$ trifft.

$$(3) \qquad \zeta^{\alpha\beta} = p^\alpha \xi^\alpha + q^\beta \dot{\xi}^\beta \qquad [\alpha, \beta = \mathrm{I}, \mathrm{II}]$$

bezeichnet den Kugelbüschel.[1]

Wenn $\mathfrak{S}$ auf $\zeta^{\alpha\beta}$ trifft, so erfolgt

$$(4) \qquad \alpha\mathfrak{x}^{\mathrm{I}} + \beta\mathfrak{x}^{\mathrm{II}} + \gamma\mathfrak{x}^{\mathrm{III}} = p^\alpha \xi^\alpha + q^\beta \dot{\xi}^\beta \qquad [\alpha, \beta = \mathrm{I}, \mathrm{II}].$$

Wenn zwei Punkte

$$(5) \qquad \mathfrak{x}^\alpha \quad [\alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}]$$

mit zwei Punkten

$$(6) \qquad \mathfrak{y}^\beta \quad [\beta = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}]$$

zusammenfallen, so erfolgt

$$(7) \qquad \alpha\mathfrak{x}^{\mathrm{I}} + \beta\mathfrak{x}^{\mathrm{II}} + \gamma\mathfrak{x}^{\mathrm{III}} = \alpha'\mathfrak{y}^{\mathrm{I}} + \beta'\mathfrak{y}^{\mathrm{II}} + \gamma'\mathfrak{y}^{\mathrm{III}},$$

wo $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ skalare Gröszen sind.

Nehmen wir einen Punkt $u$ als Linearenkombination von $\mathfrak{x}^\alpha$ und $\dot{\mathfrak{x}}^\alpha$ $[\alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}]$, so erhalten wir

$$(8) \qquad u = \rho_\alpha \mathfrak{x}^\alpha + \rho_\beta \dot{\mathfrak{x}}^\beta \quad [\alpha, \beta = \mathrm{I}, \mathrm{II}],$$

wo $\rho_\alpha$, $\rho_\beta$ gewisse skalare Zahlen bedeuten und $\mathfrak{x}$ die Kugel in $R_3$ ist.

Weiter betrachten wir

$$(9) \qquad \mathfrak{v} = \rho_\gamma \mathfrak{y}^\gamma + \rho_\delta \dot{\mathfrak{y}}^\delta,$$

$$(10) \qquad \mathfrak{w} = \rho_\varepsilon \mathfrak{z}^\varepsilon + \rho_\theta \dot{\mathfrak{z}}^\theta,$$

wo $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ die Punkte und $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Kugeln in $R_3$ sind.

Die Bedingung dafür, dasz

$$(11) \qquad \overline{\mathfrak{u}\mathfrak{v}}^2 = \overline{\mathfrak{v}\mathfrak{w}}^2$$

in $\Delta\,\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w}$ gilt, ist die

$$(12) \qquad (\rho_\alpha\mathfrak{x}^\alpha + \rho_\beta\dot{\mathfrak{x}}^\beta,\ \rho_\gamma\mathfrak{y}^\gamma + \rho_\delta\dot{\mathfrak{x}}^\delta) = \rho_\gamma\mathfrak{x}^\gamma + \rho_\delta\dot{\mathfrak{y}}^\delta,\ \rho_\varepsilon\mathfrak{z}^\varepsilon + \rho_\theta\dot{\mathfrak{z}}^\theta),$$

$$(13) \qquad (\rho_\alpha\mathfrak{x}^\alpha + \rho_\beta\dot{\mathfrak{x}}^\beta,\ \rho_\gamma\mathfrak{y}^\gamma + \rho_\delta\dot{\rho}^\delta) = (\rho_\gamma\mathfrak{y}^\gamma + \rho_\delta\dot{\mathfrak{y}}^\delta,\ \rho_\varepsilon\mathfrak{z}^\varepsilon + \rho_\theta\dot{\mathfrak{z}}^\theta)$$
$$= (\rho_\varepsilon\mathfrak{z}^\varepsilon + \rho_\theta\dot{\mathfrak{z}}^\theta,\ \rho_\alpha\mathfrak{x}^\alpha + \rho_\beta\dot{\mathfrak{x}}^\beta)$$

---

(1) NAKAZIMA (=MATUMURA=MATSUMURA), S.: Kugelgeo. von MÖBIUS, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. 2, S. 36.

ist die Bedingung dafür, dasz

$$(14)\qquad \overline{\mathfrak{u}\mathfrak{v}}^2 = \overline{\mathfrak{v}\mathfrak{w}}^2 = \overline{\mathfrak{w}\mathfrak{u}}^2$$

in $\Delta\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w}$ besteht.

Nehmen wir drei Punkte

$$(15)\qquad {}_{(1)}\mathfrak{x},\quad {}_{(2)}\mathfrak{x},\quad {}_{(3)}\mathfrak{x}$$

und gelten

$$(16)\qquad \begin{cases} {}_{(1)}\mathfrak{x} = {}_{(1)}\xi - ({}_{(1)}\xi\,{}_{(1)}\eta)\,{}_{(1)}\eta\,, \\ {}_{(2)}\mathfrak{x} = {}_{(2)}\xi - ({}_{(2)}\xi\,{}_{(2)}\eta)\,{}_{(2)}\eta\,, \\ {}_{(3)}\mathfrak{x} = {}_{(3)}\xi - ({}_{(3)}\xi\,{}_{(3)}\eta)\,{}_{(3)}\eta\,, \end{cases}$$

dann ist die Bedingung dafür, dasz

$$(17)\qquad {}_{(1)}\mathfrak{x}\,{}_{(2)}\mathfrak{x}^2 = {}_{(2)}\mathfrak{x}\,{}_{(3)}\mathfrak{x}^2$$

besteht, in $\Delta_{(1)}\mathfrak{x}\,{}_{(2)}\mathfrak{x}\,{}_{(3)}\mathfrak{x}$

$$(18)\qquad \begin{cases} [{}_{(1)}\xi - ({}_{(1)}\xi\,{}_{(1)}\eta)\,{}_{(1)}\eta,\ {}_{(2)}\xi - ({}_{(2)}\xi\,{}_{(2)}\eta)\,{}_{(2)}\eta] \\ \qquad - [{}_{(2)}\xi - ({}_{(2)}\xi\,{}_{(2)}\eta)\,{}_{(2)}\eta,\ {}_{(3)}\xi - ({}_{(3)}\xi\,{}_{(3)}\eta)\,{}_{(3)}\eta]\,, \end{cases}$$

wo ${}_{(i)}\xi$, ${}_{(i)}\eta$ die Kugeln in $R_3$ sind.

Gleichfalls ist

$$(19)\qquad \begin{cases} ({}_{(1)}\xi - ({}_{(1)}\xi\,{}_{(1)}\eta)\,{}_{(1)}\eta - ({}_{(2)}\xi\,{}_{(2)}\eta)\,{}_{(2)}\eta) \\ \qquad = ({}_{(2)}\xi - ({}_{(2)}\xi\,{}_{(2)}\eta)\,{}_{(2)}\eta\,,\ {}_{(3)}\xi - ({}_{(3)}\xi\,{}_{(3)}\eta)\,{}_{(3)}\eta) \\ \qquad = ({}_{(3)}\xi - ({}_{(3)}\xi\,{}_{(3)}\eta)\,{}_{(3)}\eta\,,\ {}_{(1)}\xi - ({}_{(1)}\xi\,{}_{(1)}\eta)\,{}_{(1)}\eta) \end{cases}$$

die Bedingung dafür, dasz

$$(20)\qquad \overline{{}_{(1)}\mathfrak{x}\,{}_{(2)}\mathfrak{x}}^2 = \overline{{}_{(2)}\mathfrak{x}\,{}_{(3)}\mathfrak{x}}^2 = \overline{{}_{(3)}\mathfrak{x}\,{}_{(1)}\mathfrak{x}}^2$$

besteht, in $\Delta_{(1)}\mathfrak{x}\,{}_{(2)}\mathfrak{x}\,{}_{(3)}\mathfrak{x}$.

Nehmen wir drei Punkte

$$(21)\qquad \begin{cases} {}_{(1)}\mathfrak{y} = 2\,({}_{(1)}\mathfrak{z}\,\xi)\,\xi - {}_{(1)}\mathfrak{z}\,, \\ {}_{(2)}\mathfrak{y} = 2\,({}_{(2)}\mathfrak{z}\,\xi)\,\xi - {}_{(2)}\mathfrak{z}\,, \\ {}_{(3)}\mathfrak{y} = 2\,({}_{(3)}\mathfrak{z}\,\xi)\,\xi - {}_{(3)}\mathfrak{z}\,, \end{cases}$$

so ist

$$(22)\qquad \begin{cases} (2\,({}_{(1)}\mathfrak{z}\xi)\,\xi - {}_{(1)}\mathfrak{z},\ 2\,({}_{(2)}\mathfrak{z}\xi)\,\xi - {}_{(2)}\mathfrak{z}) \\ \quad = (2\,({}_{(2)}\mathfrak{z}\xi)\,\xi - {}_{(2)}\mathfrak{z},\ 2\,({}_{(3)}\mathfrak{z}\xi)\,\xi - {}_{(3)}\mathfrak{z}) \end{cases}$$

die Bedingung dafür, dasz

$$(23)\qquad \overline{{}_{(1)}\mathfrak{y}\,{}_{(2)}\mathfrak{y}}^{\,2} = \overline{{}_{(2)}\mathfrak{y}\,{}_{(3)}\mathfrak{y}}^{\,2}$$

besteht, in $\varDelta_{{}_{(1)}\mathfrak{y}\,{}_{(3)}\mathfrak{y}\,{}_{(2)}\mathfrak{y}}$, wo ${}_{(i)}\mathfrak{y}$, ${}_{(i)}\mathfrak{z}$ die Punkte, $\xi$ die Kugel ist.

Wir betrachten

$$(24)\qquad |\,(\mathfrak{x}^{\alpha}\,\mathfrak{x}^{\beta})\,| = 0 \qquad [\alpha, \beta = \mathrm{I, II, III}],$$

wo

$$(25)\qquad \mathfrak{x}^{\alpha} \qquad [\alpha = \mathrm{I, II, III}]$$

die Kugeln in $R_3$ sind.

Die geometrische Bedeutung dieser Gleichung ist die, dass die drei Kugeln zwei zusammenfallende Schnittpunkte besitzen oder ein Linienelement gemeinsam haben.

Ist $\mathfrak{x}$ der Berührungspunkt zweier Kreise $\xi$, $\eta$ in $R_2$, so erfolgt

$$(26)\qquad \mathfrak{x} = \xi - (\xi\eta)\,\eta, \quad (\xi\eta)^2 = 1\,.$$

Liegt $\mathfrak{x}$ auf einem Kreis $\mathfrak{y}$, so entsteht

$$(27)\qquad (\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = 0\,.$$

Ist $\mathfrak{y}$ auf $\xi$ senkrecht, so erfolgt

$$(28)\qquad (\xi\mathfrak{y}) = 0\,.$$

Aus (26), (27) und (28) folgt

$$(\eta\mathfrak{y}) = 0\,,$$

d. h. $\eta$ und $\mathfrak{y}$ sind aufeinander senkrecht.

(Y) Im folgenden werden wir GRIFFITHS Arbeit mit einer andern Methode Ausdruck geben.

Es seien drei gegebene Kreise ${}_{(1)}\mathfrak{X}$, ${}_{(2)}\mathfrak{X}$, ${}_{(3)}\mathfrak{X}$ in $R_2$ gegeben.

Wenn der Kreis $\mathfrak{x}$ in $R_2$ ${}_{(1)}\mathfrak{x}$, ${}_{(2)}\mathfrak{x}$, ${}_{(3)}\mathfrak{x}$ unter drei gegebenen Winkeln $\theta_1$, $\theta_2$ bzw. $\theta_3$ schneidet, so entsteht

$$(1) \qquad (\mathfrak{x}{}_{(i)}\mathfrak{x}) = \cos\theta_i\,,$$

$$(2) \qquad 0 = (\mathfrak{x}, \lambda{}_{(1)}\mathfrak{x} + \mu{}_{(2)}\mathfrak{x} + \nu{}_{(3)}\mathfrak{x}) = \lambda\cdot\cos\theta_1 + \mu\cos\theta_2 + \nu\cos\theta_3\,.$$

Da aber $\lambda, \mu, \nu$ durch eine gewisse quadratische Relation verbunden sind, so können wir $\mu:\lambda$, $\nu:\lambda$ berechnen.

Also können wir GRIFFITHS' Satz[1] beweisen.

(**Z**) Im folgenden mögen wir CROFTONS Satz[2] mit einer andern methode beweisen.

CROFTONS Satz ist folgendes:

*Alle Kreise, welche zwei gegebene Kreise berühren, werden orthogonal geschnitten durch die beiden Kreise, welche durch die Schnittpunkte der gegebenen Kreise gehen und deren Winkel halbieren.*

Ist $\mathfrak{x}$ ein beliebiger Kreis in $R_2$ und $\xi$, $\eta$ die gegebenen Kreise in $R_2$, so erhalten wir

$$(\xi\mathfrak{x}) = 1\,, \quad (\eta\mathfrak{x}) = 1\,.$$

Gelten aber

$$(\mathfrak{x}, \xi - \eta) = (\xi\eta) - (\eta\eta) = 1 - 1 = 0\,,$$

$$(\xi, \xi - \eta) = 1 - (\xi\eta) = (\eta, \eta - \xi)\,;$$

so wird CROFTONS Satz[3] bewiesen.

Der Berührungspunkt $\mathfrak{x}$ ist durch

$$(1) \qquad \mathfrak{x} = \xi - (\xi{}_{(1)}\eta){}_{(1)}\eta\,, \quad (\xi{}_{(1)}\eta)^2 = 1$$

gegeben, wo $\xi$ und ${}_{(1)}\eta$ zwei Kreise in $R_2$ sind.

Wenn

$$(2) \qquad {}_{(i)}\eta \qquad [i = 2, 3, \dots]$$

(1) GRIFFITHS, J.: On the problem of finding the circle which cuts three given circles at three given angles, Prc. of the London Math. Society, III, p. 269.

(2) CROFTON, M. W.: Mathematical Reprint of the Educational Times, London, XIV, p. 54.

die Kreise in $R_2$, die $\xi$ in $\mathfrak{x}$ berühren, so findet statt

(3) $\mathfrak{x} = \xi - (\xi_{(i)}\eta)_{(i)}\eta \quad [i = 2, 3, \dots]$.

Aus (1) und (3) ergibt sich

(4) $(\xi_{(1)}\eta)_{(1)}\eta = (\xi_{(i)}\eta)_{(i)}\eta, \; (\xi_{(i)}\eta)^2 = 1, \quad [i=2, 3, \dots]$.

(4) ist die Bedingung dafür, dasz

$$_{(i)}\eta \quad [i = 1, 2, \dots]$$

in einem Punkt $\xi$ berühren.

## ( 5 )

(**A**) Wir können $n$ neue Punkten

(1) $\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha} = \sum_{\beta=1}^{n} c^{\alpha}_{\beta}\mathfrak{x}^{\beta} \qquad [\alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \dots n]$

als Linearkombinationen der $c^{\alpha}_{\beta}$ einführen mit Koeffizienten $c^{\alpha}_{\beta}$, deren Determinante $|c^{\alpha}_{\beta}| \neq 0$ sein muss, wenn $\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\mathrm{I}}, \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\mathrm{II}}, \dots, \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{(n)}$ nicht proportional werden sollen, und können dann ebensogut durch die $\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha}$ unsern Punkt darstellen, wo $\mathfrak{x}^{\alpha}$ $[\alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \dots n]$ $n$ Runkte bezeichnen.

Betrachten wir nun einen Punkt $\mathfrak{x}^{\alpha}$ und bilden das System der Skalarprodukte

(2) $(\mathfrak{x}^{\alpha}\mathfrak{x}^{\beta}) = A^{\alpha\beta}$,

so haben wir in $A^{\alpha\beta}$ ein Gröszensystem, das sich nach (1) in folgender Weise substituiert:

(3) $\overset{*}{A}{}^{\alpha\beta} = c^{\alpha}_{\beta}c^{\beta}_{\delta}A^{\gamma\delta} \qquad [\overset{*}{A}{}^{\alpha\beta} = (\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha}\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\beta})]$.

Hier sind alle Indizes von 1 bis $n$ enthalten, und es ist bei doppelt vorkommenden Indizes die rechte Seite zu andieren.

Für den zu unserem Punkt $\mathfrak{x}^{\alpha}$ gehörigen Tensor $A^{\alpha\beta}$ gilt die Symmetriebedingung

(4) $A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha}$

und dass sich die Determinante $A = |A^{\alpha\beta}|$ nach

( 5 ) $\overset{*}{A} = | c_{\beta}^{\alpha} |^{2} A$

substituiert.

Wir betrachten zwei Systeme der Punkte $\mathfrak{x}^{\alpha}$ und $\tilde{\mathfrak{x}}^{\lambda}$, die durch die beiden Punktepaare $\mathfrak{x}^{\alpha}$ und $\mathfrak{x}^{\lambda}$ $[\alpha, \lambda = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \dots n]$ dargestellt werden.

Wir definieren zu (2) analog $\tilde{A}^{\lambda\mu} = (\tilde{\mathfrak{x}}^{\lambda}\tilde{\mathfrak{x}}^{\mu})$, wobei $\tilde{A}^{\lambda\mu} = \tilde{A}^{\mu\lambda}$ ist, und setzen $\tilde{A} = | \tilde{A}^{\lambda\mu} | > 0$ voraus.

Dann haben wir für $\tilde{\mathfrak{x}}^{\lambda}$ die Büscheltransformationen

( 6 ) $\overset{*}{\tilde{\mathfrak{x}}}{}^{\lambda} = \tilde{c}_{\mu}^{\lambda}\tilde{\mathfrak{x}}^{\mu}$

zu berücksichtigen.

Die $\tilde{c}_{\mu}^{\lambda}$ in (6) sind aber von den $c_{\beta}^{\alpha}$ in (1) völlig unabhängige neue Gröszen.

In

( 7 ) $S^{\beta\lambda} = (\mathfrak{x}^{\alpha}\tilde{\mathfrak{x}}^{\lambda})$

haben wir ein Gröszensystem, bei dem beide Arten von Indizes vorkommem, einen gemischten Tensor, der sich nach

( 8 ) $\overset{*}{S}{}^{\alpha\lambda} = c_{\beta}^{\alpha}\tilde{c}_{\mu}^{\lambda}S^{\beta\mu}$

transformiert.

Wir schliessen nun den Fall aus, dass die Matrix

( 9 ) $\| \mathfrak{x}^{\mathrm{I}}, \mathfrak{x}^{\mathrm{II}}, \dots, \mathfrak{x}^{(n)}, \tilde{\mathfrak{x}}^{\mathrm{I}}, \tilde{\mathfrak{x}}^{\mathrm{II}}, \dots, \tilde{\mathfrak{x}}^{(n)} \| \equiv 0.$

ist, in der die lineare Beziehung der Form

(10) $\sigma_{\alpha}\mathfrak{x}^{\alpha} = \tilde{\sigma}_{\lambda}\tilde{\mathfrak{x}}^{\lambda}$

gilt.

Weiter können wir untersuchen wie in meiner Arbeit.[1]

**(B)** Zu $n + 1$ gegebenen linear unabhängigen Punkten

( 1 ) $\mathfrak{x}^{\alpha}$ $[\alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \dots (n+1)]$

(1) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geo. der Kreise und Kugeln (1), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ. V (1932), S. 99.

in $R_n$ gibt es immer eine hindurchgehende Kugel $\mathfrak{y}$ in $R_n$, die wir definieren können durch

$$(2) \qquad (\mathfrak{y}\,*) = |\,\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}, \mathfrak{x}^{\mathrm{II}}, \dots, \mathfrak{x}^{(n+1)}, *\,|,$$

wo für $*$ eine willkürliche Kugel eingesetzt werden kann, Wir schreiben symbolisch:

$$(3) \qquad \mathfrak{y} = \|\,\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}, \mathfrak{x}^{\mathrm{II}}, \dots, \mathfrak{x}^{(n+1)}\,\|$$

und nennen $\mathfrak{y}$ das vektorielle Produckt der $n+1$ Punkte $\mathfrak{x}^{\alpha}$.

Wir können 2 neue Punkte

$$(4) \qquad \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha} = \sum_{\beta=\mathrm{I}}^{\mathrm{II}} c^{\alpha}_{\beta}\,\mathfrak{x}^{\beta} \qquad [\alpha=\mathrm{I}, \mathrm{II}]$$

in $R_n$ als Linearkombinationen der $\mathfrak{x}^{\alpha}$ einführen mit Koeffizienten $c^{\alpha}_{\beta}$, deren Determinante $|c^{\alpha}_{\beta}| \neq 0$ sein muss, wenn $\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\mathrm{I}}$ und $\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\mathrm{II}}$ nicht proportional werden sollen, und können dann ebensogut durch die $\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha}$ unsern Punkt darstellen.

Soll ein Ausdruck in den Koordinaten der Punkte

$$(5) \qquad \mathfrak{x}^{\alpha},\ \mathfrak{y}^{\alpha},\ \mathfrak{z}^{\alpha},\ \dots,\ \text{u. s. w.} \qquad [\alpha=\mathrm{I}, \mathrm{II}],$$

mit deren Hilfe wir eine Anzahl von Punkten festlegen, nur von der geometrischen Figur der Punkte abhängen, nicht aber von den sie festlegenden Punkten, so muss er unverändert bleiben bei Substitutionen von der Art (4).

Betrachten wir jetzt einen Punkt $\mathfrak{x}^{\alpha}$ in $R_n$.

Bilden wir das System der Skalarprodukte

$$(6) \qquad (\mathfrak{x}^{\alpha}\mathfrak{x}^{\beta}) = A^{\alpha\beta},$$

so haben wir in $A^{\alpha\beta}$ ein Grössensystem, das sich nach (4) in folgender Weise substituiert:

$$(7) \qquad \overset{*}{A}{}^{\alpha\beta} = c^{\alpha}_{\gamma} c^{\beta}_{\delta} A^{\gamma\delta} \quad [\overset{*}{A}{}^{\alpha\beta} = (\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha}\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\beta})].$$

Hier laufen alle Indizes von I bis II, und es ist über doppelt vorkommende Indizes auf der rechten Seite zu summieren. Hier wie im folgenden oft wollen wir die Summenzeichen weglassen.

Um zu unserer Geometrie der Strecke zurückzukommen, bemer-

ken wir, dass für den zu unserer Strecke $\mathfrak{K}$ gehörigen Tensor nach (7) die Symmetriebedingung

$$(8) \qquad A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha}$$

gilt und dass sich ferner die Determinante $A = |A^{\alpha\beta}|$ nach

$$(9) \qquad \overset{*}{A} = |c^{\alpha}_{\beta}|^{2} \cdot A$$

substituiert.

Wollen wir nun eine eigentliche reelle Strecke haben, so müssen wir die Determinante $A > 0$ voraussetzen, eine Bedingung, die nach (9) invariant ist.

Denn diese Gleichung besagt

$$(10) \qquad (\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}\mathfrak{x}^{\mathrm{I}})(\mathfrak{x}^{\mathrm{II}}\mathfrak{x}^{\mathrm{II}}) - (\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}\mathfrak{x}^{\mathrm{II}})^{2} > 0,$$

was nach (11) bedeutet, dass die Punkte $\mathfrak{x}^{\alpha}$ sich unter dem reellen Abstand bilden, wo $\zeta$ in

$$(11) \qquad \cos^{2}\varphi = \frac{(\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}\mathfrak{x}^{\mathrm{II}})^{2}}{(\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}\mathfrak{x}^{\mathrm{I}})(\mathfrak{x}^{\mathrm{II}}\mathfrak{x}^{\mathrm{II}})}$$

den Abstand bedeutet.

Im folgenden werden wir neben dem Grössensystem $A^{\alpha\beta}$ ein anderes, gleichfalls symmetrisches $A^{\alpha\beta}$ verwenden, das wir mit unteren Indizes schreiben, und das sich nach

$$(12) \qquad A_{11} = \frac{A^{22}}{A}; \quad A_{12} = \frac{-A^{12}}{A}; \quad A_{22} = \frac{A^{11}}{A}$$

aus dem $A^{\alpha\beta}$ bestimmt.

Es gilt dann

$$(13) \qquad A^{\alpha\beta}A_{\beta\gamma} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \alpha = \gamma \\ 0 & \;\;\text{,,} \quad\; \alpha \neq \gamma \end{cases}$$

und ferner

$$(14) \qquad \tfrac{1}{2} A^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta} = 1.$$

Aus der Invarianz der linken Seite von (14) ersehen wir, dass $A_{\alpha\beta}$ ein kovarianter Tensor ist.

Wir nennen ihn den zu $A^{\alpha\beta}$ reziproken Tensor. Da die Tensoren $A^{\alpha\beta}$, $A_{\alpha\beta}$ eine wichtige Rolle spielen werden.

Wir betrachten zwei Strecken $\mathfrak{K}$ und $\bar{\mathfrak{K}}$, die durch die beiden Punktpaare $\mathfrak{x}^{\alpha}$ und $\bar{\mathfrak{x}}^{\lambda}$ [$\alpha$, $\lambda$=I, II] dargestellt sind.
sind.

Wir definieren

$$(15) \qquad \bar{A}^{\lambda\mu} = (\bar{\mathfrak{x}}^{\lambda}\bar{\mathfrak{x}}^{\mu}) \quad \text{mit} \quad \bar{A}^{\lambda\mu} = \bar{A}^{\mu\lambda}$$

und setzen

$$(16) \qquad A = |\bar{A}^{\lambda\mu}| > 0$$

voraus. Dann haben wir für $\bar{\mathfrak{K}}$ die Transformationen

$$(17) \qquad \overset{*}{\bar{\mathfrak{x}}}{}^{\lambda} = \bar{c}^{\lambda}_{\mu}\,\bar{\mathfrak{x}}^{\mu}.$$

In

$$(18) \qquad S^{\alpha\lambda} = (\mathfrak{x}^{\alpha}\bar{\mathfrak{x}}^{\lambda})$$

haben wir ein Grössensystem, bei dem beide Arten der Indizes vorkommen, einen gemischten Tensor, der sich nach

$$(19) \qquad \overset{*}{S}{}^{\alpha\lambda} = c^{\alpha}_{\beta}\,\bar{c}^{\lambda}_{\mu}\,S^{\beta\mu}$$

transformiert.

Wir schliessen nun den Fall aus, dass die Matrix

$$(20) \qquad \| \mathfrak{x}^{\mathrm{I}}, \mathfrak{x}^{\mathrm{II}}, \bar{\mathfrak{x}}^{\mathrm{I}}, \bar{\mathfrak{x}}^{\mathrm{II}} \| \equiv 0$$

ist, in der eine lineare Beziehung der Form

$$(21) \qquad \sigma_{\alpha}\mathfrak{x}^{\alpha} = \bar{\sigma}_{\lambda}\,\bar{\mathfrak{x}}^{\lambda}$$

gilt.

Die Bedeutung von (21) ist aber die, dass es einen Punkt

$$\mathfrak{z} = \sigma_{\alpha}\mathfrak{x}^{\alpha} = \bar{\sigma}_{\lambda}\,\bar{\mathfrak{x}}^{\lambda}$$

gibt, durch den beiden Strecken gehen.

Weiter können wir untersuchen wie in meiner Arbeit.[1]

---

(1) NAKAZIMA (=MATUMURA=MATSUMURA), S.: Diffelentialgeo. der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ., Vol. 34 (1931), S. 196.

(C) Im folgenden untersuchen wir einige Sätze über die Kreise und Kugeln.

## (6)

Mit

(1) $\mathfrak{x}^{\alpha} \quad [\alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \ldots, pn + r]$

können wir $2pr$ Kugeln K in $R_n$ bezeichnen, wo $\mathfrak{x}^{\alpha}$ die Kugeln in $R_n$, $p, n, r$ ganze Zahlen bedeuten.

Wir können $2pr$ neue Kegeln

(2) $\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha} = \sum_{\beta=\mathrm{I}}^{pn+r} c^{\alpha}_{\beta}\, \mathfrak{x}^{\beta} \qquad [\alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \ldots, pn + r]$

als Linearkombinationen der $\mathfrak{x}^{\alpha}$ einführen mit Koeffizienten $c^{\alpha}_{\beta}$, deren Determinante $|c^{\alpha}_{\beta}| \neq 0$ sein muss, wenn $\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\mathrm{I}}, \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\mathrm{II}}, \ldots$ und $\mathfrak{x}^{*(pn+r)}$ nicht proportional werden sollen, und können dann ebensogut durch die $\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha}$ unsere Kegeln darstellen.

Soll ein Ausdruck in den Koordinaten der Kugeln

(3) $\mathfrak{x}^{\alpha}, \mathfrak{y}^{\alpha}, \mathfrak{z}^{\alpha}, \ldots$ u. s. w. $\quad [\alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \ldots, (pn + r)]$,

mit deren Hilfe wir eine Anzahl von Kegeln festlegen, nur von der geometrischen Figur der Kegel abhängen, nicht aber von den sie festlegenden Kugeln, so muss er unverändert bleiben bei Substitutionen von der Art (2), d. h. bei dem Übergang zu beliebigen andern Hilfkugeln der durch die Kegel gehenden Büschel.

Dabei werden wir für die verschiedenen Kegel die Substitutionen (2) mit verschiedenen Koeffizientensystemen $c^{\alpha}_{\beta}$ haben.

Wir wollen (2) die Büscheltransformationen des Kegels nennen.

Für die Behandlung der Geometrie der Kegel im $R_n$ beweist es sich als zweckmässig, diese in der angebenen Weise zunächst durch ganz beliebige $pn + r$ Kugeln darzustellen.

Bilden wir die skalaren Produkte aller dieser Kugeln, so können wir, von den bekannten Ausnahmen abgesehen, aus ihnen das vollständige Invariantensystem der Figur der gegebenen Kugeln gewinnen.

Um die Invarianten der Kegel zu bekommen, haben wir aus die-

sen Invarianten noch die Ausdrücke zu bilden, die sich bei den Substitutionen (2) nicht ändern.

Dabei haben wir noch zu beachten, dass die möglichen Umnormierungen der Hilfkugeln $\mathfrak{x}^{\alpha}$ u. s. w. in den Substitutionen (2) enthalten, also nicht mehr besonders zu berücksichtigen sind.

Betrachten wir zunächst einen Kegel $\mathfrak{x}^{\alpha}$.

Bilden wir das System der Skalarprodukte

$$(4) \qquad (\mathfrak{x}^{\alpha}\mathfrak{x}^{\beta}) = A^{\alpha\beta},$$

so haben wir $A^{\alpha\beta}$ ein Grössensystem, das sich nach (2) in folgender Weise substituiert:

$$(5) \qquad \overset{*}{A}{}^{\alpha\beta} = c^{\alpha}_{\gamma}c^{\beta}_{\delta}A^{\gamma\delta} \qquad [\overset{*}{A}{}^{\alpha\beta} = (\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha}\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\beta})].$$

Hier laufen alle Indizes von I bis $pn+r$, und es ist über doppelt vorkommende Indizes auf der rechten Seite zu summieren.

Hier wie im folgenden oft wollen wir die Summenzeichen weglassen.

Für das Verhalten der Grössen gegenüber den linearen Büscheltransformationen (2) wollen wir die üblichen Bezeichnungen der Tensorrechnung einführen.

Bei Gruppen linearer Transformationen bilden bekanntlich Grössen und Grössensysteme von gewissen leicht übersehbaren Transformationseigenschaften, die Vektoren und Tensoren das naturgemässe Durchgangsstadium zur Bildung von Invarianten.

Ein System von $pn+r$ zusammengehörigen Grössen $X^{\mathrm{I}}, X^{\mathrm{II}}, \dots, X^{(pn+r)}$ bildet einen kontravarianten Vektor $X^{\alpha}$, wenn bei einer Büscheltransformation aus den $X^{\alpha}$ neue Grössen $\overset{*}{X}{}^{\alpha}$ hervorgehen, die mit den $X^{\alpha}$ durch die Substitutionsformeln

$$(6) \qquad \overset{*}{X}{}^{\alpha} = C^{\alpha}_{\beta}X^{\beta} \qquad [\alpha, \beta = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \dots (pn+r)]$$

zusammenhängen.

In $pn+r$ entsprechende Koordinaten der Hilfskugeln $\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}, \mathfrak{x}^{\mathrm{II}}, \dots, \mathfrak{x}^{(pn+r-1)}$ und $\mathfrak{z}^{(pn+r)}$ der Hilfskugeln des Kegels K bilden nach (2) somit einen Vektor für die Büscheltransformationen.

$pn+r$ Grössen $Y_{\alpha}$ bezeichnen wir als einen kovarianten Vektor,

wenn sie sich nach

$$(7)\qquad Y_\alpha = c_\alpha^\beta \overset{*}{Y}_\beta$$

transformieren, wo jetzt im Gegensatz zu (6) rechts die $\overset{*}{Y}$, links die $Y$ stehen.

Die $Y_\alpha$ transformieren sich also entgegengesetzt, „*kontragredient*" zu den $X^\alpha$.

Bei kovarianten Vektoren schreiben wir die Indizes unten, bei kontravarianten oben.

Betrachten wir zum Beispiel eine ganz bestimmte Kugel $\mathfrak{z}$ in dem Büschel von K in bestimmter Normierung, so muss sie sich einmal als Linearkombination $\rho_\alpha \mathfrak{x}^\alpha$ in den $\mathfrak{x}$, dann aber auch als eine solche $\overset{*}{\rho}_\alpha \overset{*}{\mathfrak{x}}^\alpha$ in den transformierten Grössen schreiben lassen.

Da $\mathfrak{z}$ als eine geometrisch fest bestimmte Kugel von den Büscheltransformationen nicht abhängt, so muss sie in beiden Darstellungen dieselben Koordinaten haben, also

$$(8)\qquad \mathfrak{z} = \rho_\alpha \mathfrak{x}^\alpha = \overset{*}{\rho}_\alpha \overset{*}{\mathfrak{x}}^\alpha.$$

Setzen wir $\overset{*}{\mathfrak{x}}^\alpha$ aus (2) ein, so erhalten wir

$$(9)\qquad \rho_\alpha = c_\alpha^\beta \overset{*}{\rho}_\beta,$$

die $\rho_\alpha$ bilden also einen konvarianten Vektor.

Der Begriff Vektor hat nur eine Bedeutung in Bezug auf eine bestimmte Gruppe linearer Transformationen, deshalb wollen wir die soeben definierten Vektoren auch als Büschelvektoren bezeichnen.

Man nennt die Vektoren auch Tensoren erster Stufe.

Als einen kontravarianten Tensor zweiter Stufe bezeichnen wir ein System von $(pn+r)^2$ Grössen, das sich transformiert, wie die $A^{\alpha\beta}$ in (5).

Als einen kovarianten Tensor zweiter Stufe bezeichnen wir ein Grössensystem $Z_{\alpha\beta}$, für das die Formeln

$$(10)\qquad Z_{\alpha\beta} = c_\alpha^\gamma c_\beta^\delta \overset{*}{Z}_{\gamma\delta}$$

gelten, das sich also „*umgekehrt*" wie das System $A^{\alpha\beta}$ substituiert,

was wieder in der Schreibweise der unteren Indizes zum Ausdruck kommt.

Analog lassen sich die Tensoren höherer Stufe mit mehr als zwei Indizes definieren.

Für einen kontravarianten Tensor $n$ -ter Stufe

$$W^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$$

gilt:

$$\overset{*}{W}{}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = C^{\alpha_1}_{\beta_1} C^{\alpha_2}_{\beta_2} \ldots C^{\alpha_n}_{\beta_n} W^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n} \tag{11}$$

für einen kovariauten

$$V_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$$

gilt aber:

$$V_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = C^{\beta_1}_{\alpha_1} C^{\beta_2}_{\alpha_2} \ldots C^{\beta_n}_{\alpha_n} \overset{*}{V}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n} . \tag{12}$$

Multiplizieren wir einen kontravarianten Tensor mit einem kovarianten von gleicher Stufenzahl, und lassen jeden oberen Index mit je einem unteren zusammenfallen, und summieren über alle Paare, so entsteht eine Invariante, z. B. gilt:

$$\overset{*}{Z}_{\alpha\beta} \overset{*}{X}{}^{\alpha} \overset{*}{Y}{}^{\beta} = Z_{\alpha\beta} X^{\alpha} Y^{\beta} \tag{13}$$

wo $Z_{\alpha\beta}$ ein kovarianter Tensor zweiter Stufe ist und $X^{\alpha}$, $Y^{\alpha}$ kontrariante Vektoren sind. Das Prokukt $X^{\alpha} Y^{\beta}$ ist als kontravarianter Vektor als der Tensor zweiter Stufe aufzufassen, denn für das Produkt gilt die Transformationsformel (5).

Um zu unserer Geometrie der Kegel zurückzukommen, bemerken, wir, dass für den zu unserm Kegel K gehörigen Tensor $A^{\alpha\beta}$ nach (4) die Symmetriebedingung

$$A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha}, \qquad A^{\alpha\beta} A_{\beta\gamma} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \alpha = \gamma, \\ 0 & \text{,,} \quad \alpha \neq \gamma \end{cases} \tag{14}$$

gilt und dass sich ferner die Determinante $A = |A^{\alpha\beta}|$ nach

$$\overset{*}{A} = |C^{\alpha}_{\beta}|^{2} \cdot A \tag{15}$$

substituiert, wo

$$A=\begin{vmatrix} \mathfrak{x}^{\mathrm{I}}\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}, \mathfrak{x}^{\mathrm{I}}\mathfrak{x}^{\mathrm{II}}, \ldots, \mathfrak{x}^{\mathrm{I}}\mathfrak{x}^{(pn+r)} \\ \mathfrak{x}^{\mathrm{II}}\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}, \mathfrak{x}^{\mathrm{II}}\mathfrak{x}^{\mathrm{II}}, \ldots, \mathfrak{x}^{\mathrm{II}}\mathfrak{x}^{(pn+r)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{x}^{(pn+r)}\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}, \ldots, \mathfrak{x}^{(pn+r)}\mathfrak{x}^{(pn+r)} \end{vmatrix}.$$

Wollen wir nun einen eigentlichen reellen Kegel haben, so müssen wir die Determinante $A > 0$ voraussetzen.

Wir betrachten zwei Kegel $\overline{K}$ und $K$, die durch die beiden Kugelpaare $\mathfrak{x}^{\alpha}$ und $\bar{\mathfrak{x}}^{\lambda}$ $[\alpha, \lambda = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \ldots, pn+r]$ dargestellt sind.

Wir edfinieren zu (4) analog

$$(16) \qquad \bar{A}^{\lambda\mu} = (\bar{\mathfrak{x}}^{\lambda}\bar{\mathfrak{x}}^{\mu})$$

mit $\bar{A}^{\lambda\mu} = \bar{A}^{\mu\lambda}$ und setzen $A = |\bar{A}^{\lambda\mu}| > 0$ voraus.

Dann haben wir für $\overline{K}$ die Büscheltransformationen

$$(17) \qquad \overset{*}{\bar{\mathfrak{x}}}{}^{\lambda} = \bar{c}^{\lambda}_{\mu}\bar{\mathfrak{x}}^{\mu}$$

zu berücksichtigen. Die $\bar{c}^{\lambda}_{\mu}$ in (17) sind aber von den $C^{\alpha}_{\beta}$ in (2) völlig unabhängige neue Grössen.

Daher haben wir Vektoren bezüglich der Büscheltransformationen von $K$ einerseits und von $\overline{K}$ anderseits unterscheiden.

In

$$(18) \qquad S^{\alpha\lambda} = (\mathfrak{x}^{\alpha}\bar{\mathfrak{x}}^{\lambda})$$

haben wir ein Grössensystem, bei dem beide Arten der Indizes vorkommen, einen „gemischten" Tensor, der sich nach

$$(19) \qquad \overset{*}{S}{}^{\alpha\lambda} = c^{\alpha}_{\beta}\bar{c}^{\lambda}_{\mu}S^{\beta\mu}$$

transformiert.

Wir schliessen nun den Fall aus, dass die Matrix

$$(20) \qquad \| \mathfrak{x}^{\mathrm{I}}, \mathfrak{x}^{\mathrm{II}}, \ldots, \mathfrak{x}^{(pn+r)}, \bar{\mathfrak{x}}^{\mathrm{I}}, \bar{\mathfrak{x}}^{\mathrm{II}}, \ldots, \bar{\mathfrak{x}}^{(pn+r)} \| = 0$$

ist, in der eine lineare Beziehung der Form

$$(21) \qquad \sigma_{\alpha}\mathfrak{x}^{\alpha} = \bar{\sigma}_{\lambda}\bar{\mathfrak{x}}^{\lambda}$$

gilt.

Die Bedeutung von (21) ist aber die, dass es eine Kugel

$$(22) \qquad \mathfrak{z} = \sigma_\varkappa \mathfrak{x}^\alpha = \bar{\sigma}_\lambda \bar{\mathfrak{x}}^\lambda$$

gibt, auf der beide Kegel hindurchgehen.

Wir wollen jetzt die Figuren betrachten, die aus einem Kegel $\mathfrak{x}^\varkappa$ und einer Kugel $\mathfrak{y}$ des $R_n$ Raumes bestehen, die wir in normierten Koondinaten

$$(23) \qquad (\mathfrak{y}\mathfrak{y}) = 1$$

gegeben denken.

Greifen wir eine Kugel

$$(24) \qquad \mathfrak{z} = \rho_\alpha \mathfrak{x}^\alpha$$

aus dem Büschel $\mathfrak{x}^\alpha$ heraus, so ist der Winkel $\psi$ zwischen $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ durch

$$(25) \qquad \cos^2\psi = \frac{[\rho_\alpha(\mathfrak{x}^\alpha\mathfrak{y})]^2}{\rho\,\rho^\alpha}$$

gegeben.

Im folgenden werden wir $\cos^2\psi$ nach (25) als Funktion der variablen Kugel finden, $\mathfrak{z}$ als Funktion von $\rho_{\mathrm{I}}$, $\rho_{\mathrm{II}}$, ... und $\rho^{(pn+r)}$ betrachten und das Minimum aufsuchen.

Aus

$$(26) \qquad \frac{\partial(\cos^2\psi)}{\partial\rho_\gamma} = 0 \qquad [\gamma = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \ldots, (pn+r)]$$

folgt eine Relation der Form:

$$(27) \qquad A^{\gamma\beta}\rho_\beta \ \text{ prop. } \ (\mathfrak{x}^\gamma\mathfrak{y}).$$

Multiplizieren wir (27) beiderseits mit $A_{\alpha\gamma}$, so ergibt sich

$$(28) \qquad \rho_\alpha \ \text{ prop. } \ (\mathfrak{x}_\alpha\mathfrak{y}),$$

daraus erhalten wir

$$(29) \qquad \cos^2\varphi = (\mathfrak{x}_\alpha\mathfrak{y})(\mathfrak{x}^\alpha\mathfrak{y}),$$

wo $\varphi$ der Minimumwinkel zwischen $\bar{\mathrm{K}}$ und $\mathfrak{y}$ ist.

Wir definieren $\varphi$ in (29) als Winkel zwischen K und $\mathfrak{y}$.

Sollen K und die Kugel $\mathfrak{y}$ aufeinander sekrecht stehen, so muss

$$(30) \qquad \cos^2\varphi = A_{\alpha\beta}\,(\mathfrak{x}^\alpha\mathfrak{y})\,(\mathfrak{x}^\beta\mathfrak{y}) = 0$$

sein. Wegen

$$(31) \qquad |\, A_{\alpha\beta}\,| = 1 : A > 0$$

ist das im Reellen nur möglich, wenn

$$(32) \qquad (\mathfrak{x}^\alpha\mathfrak{y}) \equiv 0$$

ist.(1)

Zu $n+1$ gegebenen linear unabhängigen Kugeln

$$(33) \qquad \mathfrak{x}^\alpha \quad [\alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \dots (n+1)]$$

in $R_n$ gibt es immer eine gemeinsame senkrechte Kugel $\mathfrak{y}$ in $R_n$, die wir definieren können mit

$$(34) \qquad `(\mathfrak{x}\,*) = |\, \mathfrak{x}^{\mathrm{I}}, \mathfrak{x}^{\mathrm{II}}, \dots, \mathfrak{x}^{(n+1)}, *\,|,$$

wo für $*$ eine willkürliche Kugel in $R_n$ eingesetzt werden kann.

Wir schreiben symbolisch:

$$(35) \qquad \mathfrak{y} = \|\, \mathfrak{x}^{\mathrm{I}}, \mathfrak{x}^{\mathrm{II}}, \dots, \mathfrak{x}^{(n+1)} \|,$$

so können wir $\mathfrak{x}^\alpha$ $[\alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}, pn+r]$ mit

$$\mathfrak{x}^\alpha\,[\alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \dots, (p-1)n + r - 1] \quad \text{und} \quad \mathfrak{y}$$

bezeichnen.

Weiter können wir untersuchen wie in meiner Arbeit.(1)

(1) NAKAZIMA (= MATUMURA = MATSUMURA), S.: Differentialgeometrie der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ., Vol. 34 (1931), S. 196.

Vgl. NAKAZIMA, S.: Differentialgeometrie der Hyperboloidscharen, Tôhoku Math. Journ., Vol. 31 (1929), S. 237.

( 7 )

Im folgenben werden wir eine meiner Arbeiten[1] im $R_n$ verallgemeinern.

Es seien

$$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_{n+3}$$

$n+3$ belieblge Kugeln in $R_n$ und

$$f_k = a_1(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) + a_2 x_1 + a_3 x_2 + \cdots + a_{n+1} x_n + a_{n+2},$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n+3)$$

die zu $\mathfrak{a}_k$ gehörige Kugelfunktion.

Es lassen sich nun bis auf einen unbestimmten, aber allen gemeinschaftlichen Faktor $n+3$ Zahlgrössen

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+3}$$

bestimmen, welche den $n+3$ Gleichungen genügen:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_{n+3} p_{n+3}, \\ 0 = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \ldots + \alpha_{n+3} q_{n+3}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} n+3$$

Multiplizieren wir diese Gleichungen der Reihe nach mit

$$(x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2), x_1, x_2, \ldots, x_n, 1$$

und addieren, so bekommen wir

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_{n+3} f_{n+3} = 0.$$

Hieraus folgt

$$\alpha_1 \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_2 + \ldots + \alpha_{n+3} \mathfrak{a}_{n+3} = 0,$$

d. h. zwischen den Kreisen

(1) NAKAZIMA (=MATUMURA = MATSUMURA), S.: Differentialgeometrie der Kreischaren, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ., Vol. 34 (1931), S. 202.

$$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots, \mathfrak{a}_{n+3}$$

gilt in der Tat eine lineare Beziehung.

Zwischen weniger als $n+3$ Kugeln besteht nur in besonderen Fällen eine lineare Beziehung; mehr als $n+3$ Kugeln geben stets Anlass zu mehreren linearen Beziehungen.

Also erfolgt

$$\alpha_1\mathfrak{a}_1 + \alpha_2\mathfrak{a}_2 + \ldots + \alpha_{n+3}\mathfrak{a}_{n+3} = 0,$$

wenn

$$\mathfrak{a}_h\mathfrak{a}_k = 0 \quad [i, h = 1, 2, \ldots, n+3]$$

ist, d. h. wenn zwei Kugeln aufeinander senkrecht sind, dann ist

$$\alpha_1(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_1) + \mathfrak{a}_2(\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_1) + \cdots + \alpha_{n+3}(\mathfrak{a}_{n+3}\mathfrak{a}_1) = 0,$$

d. h.

$$\alpha_1 = 0.$$

Mit ähnlicher Methode können wir beweisen, dass

$$\alpha_i = 0 \qquad [i = 2, 3, \cdots, n+3],$$

als

$$\alpha_1\mathfrak{a}_1 + \alpha_2\mathfrak{a}_2 + \ldots + \alpha_{n+3}\mathfrak{a}_{n+3} \equiv 0,$$

d. h. zwischen $n+3$ Kugeln

$$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots, \mathfrak{a}_{n+3}$$

eine Beziehung besteht.

Also haben wir den

**Satz:** *Zwischen $n+3$ beliebigen Kugeln besteht immer eine lineare Beziehung, oder anders ausgedrückt, $n+3$ beliebige Kugeln sind stets voneinander linear abhängig.*

## ( 8 )

(A) Im folgenden werden wir eine[1] meiner Arbeiten verallgemeinern.

Wir betrachten

$$(1)\qquad ({}_{(i)}\mathfrak{x}\,{}_{(i)}\mathfrak{x}) = {}_{(i)}x_0^2(u,v)+{}_{(i)}x_1^2(u,v)+{}_{(i)}x_2^2(u,v)+{}_{(i)}x_3^2(u,v) = 0,$$

$$(2)\qquad ({}_{(i)}\mathfrak{y}\,{}_{(i)}\mathfrak{y}) = {}_{(i)}y_0^2(u,v)+{}_{(i)}y_1^2(u,v)+{}_{(i)}y_2^2(u,v)+{}_{(i)}y_3^2(u,v) = 0,$$

$$(3)\qquad ({}_{(i)}\mathfrak{x}\,{}_{(i)}\mathfrak{y}) = {}_{(i)}x_0\,{}_{(i)}y_0+{}_{(i)}x_1\,{}_{(i)}y_1+{}_{(i)}x_2\,{}_{(i)}y_2+{}_{(i)}x_3\,{}_{(i)}y_3 = 1\,.$$

Aus (3) folgt

$$(4)\qquad \sum dx_i\cdot y_i + \sum x_i\cdot dy_i = 0\,.$$

Nun können wir setzen

$$(5)\qquad \sum dx_i\cdot y_i = \text{const.}\ (=k)\,;$$

denn, wenn wir setzen

$$(6)\qquad \bar{x} = \rho x\,,\quad \bar{y} = \rho^{-1}y\,,$$

dann erfolgt

$$(7)\qquad \sum d\bar{x}_i\cdot\bar{y}_i = \sum(\rho\,dx_i + d\rho\cdot x_i)(\rho^{-1}y_i)$$
$$= \sum dx_i\cdot y_i + \sum d\rho\cdot\rho^{-1}\cdot x_i y_i\,.$$

Damit

$$(8)\qquad \sum dx_i\cdot y_i + d\rho\cdot\rho^{-1} = \text{konst.}\ (=k)$$

sei, musz sein:

$$(9)\qquad d\rho/\rho = k - \sum dx_i\cdot y_i\,,\quad \text{i. e.}\quad \rho = e^{-\sum dx_i\cdot y_i}\,.$$

Aus

$$(10)\qquad \sum dx_i\cdot y_i = k\,,$$

folgt

$$(11)\qquad \sum d^2x_i\cdot y_i + \sum dx_i\cdot dy_i = 0\,,\qquad \text{u. s. w.}\,.$$

---

(1) NAKAZIMA, S.: Differentialgeo. der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Jaurn., Vol. 34 (1931), S. 191.

(**B**) Berühren sich zwei Kugeln $\xi$ und $\eta$ in $\mathfrak{x}$, so besteht

$$(1) \qquad \mathfrak{x} = \xi - (\xi\eta)\,\eta\,, \quad (\xi\eta)^2 = 1\,.$$

Ist $\bar{\mathfrak{x}}$ ein Berührungspunkt zweier Kugeln $\bar{\xi}$ und $\bar{\eta}$ in $R_3$, so kommt zustande

$$(2) \qquad \bar{\mathfrak{x}} = \bar{\xi} - (\bar{\xi}\,\bar{\eta})\,\bar{\eta}\,, \quad (\bar{\xi}\,\bar{\eta})^2 = 1\,.$$

Nun setzen wir

$$(3) \qquad (\mathfrak{x}\,\bar{\mathfrak{x}}) = 1\,,$$

so folgt aus meiner Arbeit(1)

$$(4) \qquad \begin{cases} \sum (d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}) = G_{ij}\, du^i\, du^j\,, \\ \sum (d\mathfrak{x})^2 = g_{ij}\, du^i\, du^j\,, \\ \sum (d\mathfrak{y})^2 = \bar{g}_{ij}\, du^i\, du^i\,, \quad [i, j = \mathrm{I}, \mathrm{II}]\,, \end{cases}$$

da betrachten wir $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ als Funktionen zweier Parameter $u^i$ und $u^j$.

Aus (1), (2), (3) und (4) folgt

$$(5) \qquad \begin{cases} (d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}) = (d\xi\, d\bar{\xi}) - (\xi\eta)(d\bar{\xi}\, d\eta) - (\bar{\xi}\,\bar{\eta})(d\xi\, d\bar{\eta}) \\ \qquad\qquad + (\xi\eta)(\bar{\xi}\,\bar{\eta})(d\eta\, d\bar{\eta}) = G_{ij}\, du^i\, du^j\,, \\ (d\mathfrak{x})^2 = (d\xi\, d\xi) + (d\eta\, d\eta) - 2(\xi\eta)(d\xi\, d\eta) = g_{ij}\, du^i\, du^j\,, \\ (\eta\mathfrak{y})^2 = (d\bar{\xi} d\bar{\xi}) + (d\bar{\eta}\, d\bar{\eta}) - 2(\bar{\xi}\,\bar{\eta})(d\bar{\xi}\, d\bar{\eta}) = \bar{g}\, du^i\, du^j\,, \end{cases}$$

wo $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$ zwei gegebene Fortschreitungsrichtungen bedeuten.

Ihr Winkel $\theta$ wird gegeben durch

$$(6) \qquad \cos^2\theta = \frac{(G_{ij}\, du^i\, du^j)^2}{(g_{ij}\, du^i\, du^j)(\bar{g}_{ij}\, du^i\, du^j)}\,;$$

wenn also $G_{ij} \equiv 0$ ist, dann musz $\theta = \frac{\pi}{2}$ sein, und wenn $g_{ij} \equiv 0$ oder $\bar{g}_{ij} \equiv 0$, dann $G_{ii} \equiv 0$.

Wir setzen

$$(7) \qquad \mathfrak{z} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{z} + \mathfrak{y})\,.$$

---

(1) NAKAZIMA, S.: Differentialgeo. der Kreisscharen X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ. 34, S. 191.

so entsteht

$$(8)\qquad d\mathfrak{z} = \tfrac{1}{2}(d\mathfrak{x} + d\mathfrak{y}),$$

daraus ergibt sich

$$(9)\qquad \begin{aligned}(d\mathfrak{z}d\mathfrak{z}) &= \tfrac{1}{4}\{(d\mathfrak{x}d\mathfrak{x}) + (d\mathfrak{y}d\mathfrak{y}) + 2(d\mathfrak{x}d\mathfrak{y})\}\\ &= \tfrac{1}{4}(g_{ij} + \bar{g}_{ij} + 2\,\mathrm{G}_{ij})\,du^i du^j,\end{aligned}$$

so gilt

$$(10)\qquad 4\,h_{ij} = g_{ij} + \bar{g}_{ij} + 2\,\mathrm{G}_{ij},$$

wo

$$(11)\qquad (d\mathfrak{z}d\mathfrak{z}) = h_{ij}\,du^i du^j$$

gesetzt ist.

Wenn

$$(12)\qquad \mathfrak{z} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{x} - \mathfrak{y})$$

in (7) gültig ist, so erfolgt

$$(13)\qquad (d\mathfrak{z}d\mathfrak{z}) = h_{ij}\,du^i\,du^j = \tfrac{1}{4}\{(d\mathfrak{x}d\mathfrak{x}) + (d\mathfrak{y}d\mathfrak{y}) - 2(d\mathfrak{x}d\mathfrak{y})\},$$

$$(14)\qquad \begin{cases}1 = (\mathfrak{x} + d\mathfrak{x},\ \mathfrak{y} + d\mathfrak{y}), & (\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = 1,\\ (\mathfrak{x}d\mathfrak{y}) = (\mathfrak{y}d\mathfrak{x}) = 0.\end{cases}$$

Folglich

$$(15)\qquad (d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y}) = 0,$$

wenn $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ einander berühren, so erfolgt

$$(16)\qquad h_{ij}\,du^i\,du^j = \tfrac{1}{4}\{\mathrm{G}_{ij} + \bar{g}_{ij}\}\,du^i\,du^j.$$

Weiter setzen wir

$$(17)\qquad \xi = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{x} - \mathfrak{y}),\quad \eta = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}),$$

so erhalten wir

$$(18)\qquad \begin{cases}\xi_h = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{x}_h - \mathfrak{y}_h), & \xi_k = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{x}_k - \mathfrak{y}_k),\\ \eta_k = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{x}_k + \mathfrak{y}_k), & \eta_h = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{x}_h + \mathfrak{y}_h),\end{cases}$$

daraus ergibt sich

$$
(19)\qquad \begin{cases} (\xi_h \xi_k) = \frac{1}{4}\{(\mathfrak{x}_h\mathfrak{x}_k) - (\mathfrak{x}_h\mathfrak{y}_k) - (\mathfrak{x}_h\mathfrak{y}_k) - (\mathfrak{y}_h\mathfrak{y}_k)\}, \\ (\eta_h \eta_k) = \frac{1}{4}\{(\mathfrak{x}_h\mathfrak{x}_k) + (\mathfrak{x}_h\mathfrak{y}_k) + (\mathfrak{x}_h\mathfrak{y}_v) + (\mathfrak{y}_h\mathfrak{y}_k)\}, \end{cases}
$$

also gilt

$$
(20)\qquad \begin{cases} \mathrm{H}_{ij} = (\mathfrak{x}_h \xi_k) = \frac{1}{2}\{g_{ij} - 2\,\mathrm{G}_{ij} - \bar{g}_{ij}\}\, du^i\, du^j, \\ \mathrm{K}_{ij} = (\eta_h \eta_k) = \frac{1}{4}\{g_{ij} + 2\,\mathrm{G}_{ij} + \bar{g}_{ij}\}\, du^i\, du^j. \end{cases}
$$

**(C)** Wir betrachten

$$
(1)\qquad \sum (dx_i)^2 = g_{ij}\, du^i\, du^j
$$

in meiner Arbeit[1] und setzen

$$
(2)\qquad g_{ij} = \mathfrak{y}_\lambda\ \ \mathfrak{y}_i
$$

so findet statt

$$
(3)\qquad 0 = \mathfrak{y}_{\lambda k}\cdot \mathfrak{y}_i + \mathfrak{y}_\lambda \cdot \mathfrak{y}_{ik},
$$

wo der Kürze halber $\Delta_k \mathfrak{y}_\lambda = \mathfrak{y}_{\lambda k}$ gesetzt ist.

Die unbekannten Komponenten $y_i$ von $\mathfrak{y}$ und die Hilfsgröszen $y_{i\lambda}$ sind ferner nicht unabhängig, sondern durch die Relationen

$$
(4)\qquad \partial y_i / \partial u^\lambda = y_{i\lambda} \qquad [i = 0, 1, 2, 3]
$$

miteinander verknüpft.

Aus (3) folgt

$$
(5)\qquad \mathfrak{y}_{\lambda k}\cdot \mathfrak{y}_i = 0
$$

Nun setzen wir

$$
(6)\qquad \mathfrak{y}_{\lambda k} = \mathfrak{X}
$$

so erfolgt

$$
(7)\qquad \mathfrak{y}_{\lambda i} = b_{\lambda i}\,\mathfrak{X},
$$

wo $\mathfrak{X}^2 = 1$, $\mathfrak{X}\cdot \mathfrak{y}_{\lambda i} = b_{\lambda i}$ gilt.

Weiter können wir setzen

(1) NAKAZIMA, S.: Differentialgeo. der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ., Vol. 34 S. 191.

$$
(8)\quad \left\{\begin{array}{l}
\mathfrak{y}_{\lambda ik} - \mathfrak{y}_{\lambda ki} = - R_{ik\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}\, \mathfrak{y}_\nu , \\
\mathfrak{X}\,(\Delta_k b_{i\lambda} - \Delta_i b_{k\lambda} - (b_{i\lambda} b_{k\mu} - b_{k\lambda} b_{i\mu})\, \mathfrak{y}^\mu = - R_{ik\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}\, \mathfrak{y}_\nu , \\
\mathfrak{y}_{\lambda ik} = \nabla_k b_{\lambda i} \mathfrak{X} + b_{\lambda i}\, \mathfrak{X}_k , \\
\mathfrak{X}\ \ \mathfrak{X}_k = 0 , \qquad \mathfrak{y}_\nu = g_{\mu\nu}\, \mathfrak{y}^\mu , \\
b_{\lambda i} = - \mathfrak{y}_\lambda \cdot \mathfrak{X}_i , \qquad R_{ik\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu}\, \mathfrak{y}_\nu = R_{ik\lambda\mu}\, \mathfrak{y}^\mu , \\
\mathfrak{X} \cdot \mathfrak{y}_\lambda = 0 , \qquad \mathfrak{y}^\mu \cdot \mathfrak{X} = g^{\alpha\mu} \mathfrak{y}_\alpha \cdot \mathfrak{X} = 0 , \\
\mathfrak{X}_\lambda = - b_{\lambda i}\, \mathfrak{y}^i , \qquad \nabla_i b_{h\lambda} - \nabla_k b_{i\lambda} = 0 , \\
\mathfrak{y}^i = g^{ik}\, \mathfrak{y}_k , \qquad \nabla_i b_{k\lambda} = \nabla_k\, b_{i\lambda} , \\
\mathfrak{y}_{\lambda ik} = \nabla_k\, b_{\lambda i}\, \mathfrak{X} - b_{\lambda i}\, b_{k\mu}\, \mathfrak{y}^\mu , \qquad p_{ik\lambda\mu}\, \mathfrak{y}^\mu = 0 , \\
p_{ik\lambda\mu} = (b_{i\lambda}\, b_{k\mu} - b_{k\lambda} b_{i\mu}) - R_{ik\lambda\mu}
\end{array}\right.
$$

und endlich kommt zu[1]

$$
p_{ik\lambda\mu} = 0
$$

$$
R_{ik\lambda\mu} = b_{i\lambda}\, b_{k\mu} - b_{k\lambda}\, b_{i\mu} .
$$

## ( 9 )

(**A**) Aus meiner Sätzen[2] kann man den folgenden Satz erhalten:

**Satz:** *Wenn zwei Eifläche $\mathfrak{x}(u^1, u^2)$ und $\mathfrak{e}(u^1, u^2)$ die Eigenschaft besitzen, dass ihre orthogonalen Projektionen stets paarweise homothetisch (ähnlich und zueinander ähnlich gelegen) sind, weiter die Eifläche $\mathfrak{x}$ die Eigenschaft besitzt, dasz ihre orthogonalen Projektionen alleeinander ähnlich sind, so sind $\mathfrak{e}$ selbst die Kugel.*

(**B**) Im folgenden mögen wir über MÜLLERS Arbeit einige Bemerkungen machen.

---

(1) Vgl. LEVI-CIVITA: Der absolute Differentialkalkul, 5, 152.

(2) NAKAZIMA (=MATUMURA=MATSUMURA), S.: Eine charakteristische Eigenschaft der Kugel, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 35 Bd. (1926), S. 298.

NAKAZIMA, S.: Über homothetische Eiflächen, Japanese Journal of Mathematics, Vol. VII (1930), S. 162.

Sind die gemeinsame Potenz der beiden Punktepaare von

$$P_i = 0 \quad \text{und} \quad P_j = 0$$

gleich zu der gemeinsamen Potenz der beiden Punktepaare von

$$P_i = 0 \quad \text{und} \quad P_k = 0$$

so folgt aus (1) in MÜLLERS Arbeit[1]

$$(1) \qquad a_i c_k + a_k c_i - 2\, b_i b_k = a_i c_i + a_j c_i - 2\, b_i b_j\,,$$

oder

$$(2) \qquad a_i (c_k - c_j) + c_i (a_k - a_j) - 2\, b_i (b_k - b_j) = 0\,.$$

*Besteht* (2) *für jeden Wert von* $P_i$, *so entsteht aus* (2)

$$(3) \qquad c_k = c_j\,, \quad a_k = a_j\,, \quad b_k = b_j\,,$$

d. h.

$$(4) \qquad P_i \equiv P_k\,,$$

wo

$$(5) \qquad a_i a_k a_j \neq 0\,.$$

Wenn

$$(6) \qquad c_k \equiv c_j + dc_j\,, \quad a_k \equiv a_j + da_j\,, \quad b_k \equiv b_j + db_j$$

bestehen in (2), so folgt aus (2)

$$(7) \qquad a_i \cdot dc_j + c_i \cdot da_j - 2\, b_i db_j = 0\,,$$

so besteht der

**Satz:** *Ist die gemeinsame Potenz der beiden Punktepaare*

$$P_i = 0 \quad \textit{und} \quad P_j = 0$$

*gleich zu der gemeinsamen Potenz der beiden Punktepaare von*

$$P_i = 0 \quad \textit{und} \quad (a_j + da_j)\, x^2 + 2\,(b_j + db_j)\, x + (c_j + dc_j) = 0\,.$$

---

(1) MÜLLER, F.: Über das Analogon zur Lieschen Kugelgeo. etc., Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung, XI (1902), S. 124.

# BEITRÄGE ZUR GEOMETRIE DER KREISE UND KUGELN (XXIX)

Sôzi MATUMURA

(Accepted for publication, December, 12, 1938.)

Im folgenden möchten wir einige Sätze über Kreise und Kugeln mitteilen.

## ( 1 )

Dieselbe Methode wie in meiner vorhergehenden Arbeit(1) möchte ich hier auf die $2n$ Kugeln in $R_N$ anwenden.

(A)

$$(1) \qquad \mathfrak{x}^{\alpha} \quad [\alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \ldots, pn\,;\ p < \mathrm{N}]$$

bezeichnet $n$ Kreise $R_N$, wo $\mathfrak{x}^{\alpha}$ Kugeln in $R_N$; $p$, N und $n$ ganze Zahlen bedeuten.

Zu N + 1 gegebenen linear unabhängigen Kugeln

$$(2) \qquad \mathfrak{x}^{\alpha} \quad [\alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \ldots (\mathrm{N}+1)]$$

gibt es immer eine gemeinsame senkrechte Kugel $\mathfrak{y}$, die wir definieren können durch

$$(3) \qquad (\mathfrak{y}\, *) = |\, \mathfrak{x}^{\mathrm{I}}, \mathfrak{x}^{\mathrm{II}}, \ldots, \mathfrak{x}^{(\mathrm{N}+1)}, *\, |,$$

wofür $*$ als eine willkürliche Kugel eingesetzt werden kann.(2)

Wir schreiben symbolisch:

---

[Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ. Formosa, Japan, Vol. XXI, No. 8 (a), February, 1939.]

(1) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (1), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. 3 (1932), S. 96.

(2) Vgl. NAKAZIMA (=MATSUMURA=MATUMURA), S.: Differentialgeometrie der Hyperboloidscharen, Zyklidenscharen und Kurvenpaaren Tôhoku Math. Journ., Vol. 31 (1929) S. 227.

$$(4)\qquad \mathfrak{y} = \| \mathfrak{x}^{\mathrm{I}}, \mathfrak{x}^{\mathrm{II}}, \ldots, \mathfrak{x}^{(\mathrm{N}+1)} \|$$

und nennen $\mathfrak{y}$ das vektorielle Produkt der N + 1 Kugeln $\mathfrak{x}^{\alpha}$.

Wenn

$$(5)\qquad pn \leqq \mathrm{N} + 1$$

gilt, so kann man setzen

$$(6)\qquad (\mathfrak{y}\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}) = (\mathfrak{y}\mathfrak{x}^{\mathrm{II}}) = \ldots = (\mathfrak{y}\mathfrak{x}^{pn}) = 0\,.$$

Wenn

$$(7)\qquad a = \mathrm{N}$$

besteht in (1), so bezeichnet

$$(8)\qquad \mathfrak{x}^{\alpha}\quad [\alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \ldots, \mathrm{N}]$$

zwei Punkte in $\mathrm{R}_{\mathrm{N}}$.

Wenn $u$ einer der Schnittpunkte der N Kugeln $\mathfrak{x}^{\alpha}$ ist, so folgt

$$(9)\qquad (uu) = (u\mathfrak{x}^{\alpha}) = 0\,,$$

weiter gilt

$$(10)\qquad | u, \mathfrak{x}^{\mathrm{I}}, \mathfrak{x}^{\mathrm{II}}, \ldots, \mathfrak{x}^{\mathrm{N}}, * | = 0$$

für jede Hilfskugel $*$.

Es ist also elne Linearkombination der $\mathfrak{x}^{\alpha}$.

Wir können $pn$ neue Kugeln

$$(11)\qquad \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha} = \sum_{\beta=\mathrm{I}}^{pn} c^{\alpha}_{\beta}\, \mathfrak{x}^{\beta}\quad [\alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \ldots, pn\,;\ p < \mathrm{N}]$$

als Linearkombinationen mit Koeffizienten $c^{\alpha}_{\beta}$ einführen und dann durch (11) unsere $n$ neuen Kreise in $\mathrm{R}_{\mathrm{N}}$ darstellen.

Soll ein Ausdruck in den Koordinaten der Kugeln

$$(12)\qquad \mathfrak{x}^{\alpha}, \mathfrak{y}^{\alpha}, \mathfrak{z}^{\alpha}, \ldots \quad \text{u. s. w.}\quad [\alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \ldots, pn]$$

mit deren Hilfe wir eine Anzahl von Kreisen festlegen, nur von der geometrischen Figur der Kriese abhängen, nicht aber von den sie festlegenden Kugeln, so muss er unverändert bleiben bei Substitutionen der Art (11), d. h. bei dem Übergang zu beliebigen andern Hilfskugeln der durch die Kreise gehenden Büschel.

Dabei werden wir für die verschiedenen Kreise Substitutionen (11) mit verschiedenen Koeffizientensystemen $c^\alpha_\beta$ haben.

Betrachten wir zunächst $n$ Kreise in $R_V$ und bilden das System der Skalarprodukte

$$(13)\qquad (\mathfrak{x}^\alpha \mathfrak{x}^\beta) = A^{\alpha\beta},$$

so haben wir in $A^{\alpha\beta}$ ein Gröszensystem, das sich nach (11) in folgender Weise substituiert:

$$(14)\qquad \overset{*}{A}{}^{\alpha\beta} = c^\alpha_\beta c^\beta_\delta A^{\beta\delta} \quad [\overset{*}{A}{}^{\alpha\beta} = (\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^\alpha \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^\beta)].$$

Hier sind alle Indizes von I bis $pn$ enthalten, und es ist bei doppelt vorkommenden Indizes die rechte Seite zu addieren.

Für den zu unserem Kreise gehörigen Tensor $A^{\alpha\beta}$ gilt die Symmetriebedingung

$$(15)\qquad A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha}$$

und dass sich ferner die Determinante $A = |A^{\alpha\beta}|$ nach

$$(16)\qquad \overset{*}{A} = |c^\alpha_\beta|^2 \cdot A$$

substituiert.

Wollen wir nun $n$ eigentliche reelle Kreise haben, so müssen wir die Determinante $A \gtrless 0$ voraussetzen.

Nun wollen wir neben dem Gröszensystem $A^{\alpha\beta}$ ein anderes, gleichfalls symmetrisches $A_{\alpha\beta}$ einführen, das wir mit unteren lnoizes anschreiben:

$$(17)\qquad A_{ij}A^{ik} = \delta^k_j = \begin{cases} 1 & \text{für } k = j, \\ 0 & \ ,, \quad k \neq j, \end{cases}$$

wobei

$$(18)\qquad A = \begin{vmatrix} \mathfrak{x}^{\mathrm{I}}\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}, & \mathfrak{x}^{\mathrm{I}}\mathfrak{x}^{\mathrm{II}}, & \cdots, & \mathfrak{x}^{\mathrm{I}}\mathfrak{x}^{pn} \\ \mathfrak{x}^{\mathrm{II}}\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}, & \mathfrak{x}^{\mathrm{II}}\mathfrak{x}^{\mathrm{II}}, & \cdots, & \mathfrak{x}^{\mathrm{II}}\mathfrak{x}^{pn} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{x}^{pn}\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}, & \mathfrak{x}^{pn}\mathfrak{x}^{\mathrm{II}}, & \cdots, & \mathfrak{x}^{pn}\mathfrak{x}^{pn} \end{vmatrix} = \| A^{ij} \|$$

sich aus den $A^{\alpha\beta}$ bestimmt.

Es gilt dann

$$(19)\qquad A^{\alpha\beta}A_{\beta\gamma} = \begin{cases} 1 \text{ für } \alpha = \gamma, \\ 0 \quad ,, \quad \alpha \neq \gamma, \end{cases}$$

und ferner

$$(20)\qquad \tfrac{1}{2} A^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta} = 1 .$$

Aus der Invarianz der linken Seite von (20) ersieht man, dass $A_{\alpha\beta}$ ein kovarianter Tensor ist.

Man nennt ihn den zu $A^{\alpha\beta}$ reziproken Tensor.

Da die Tensoren $A^{\alpha\beta}$, $A_{\alpha\beta}$ eine wichtige Rolle spielen werden, wollen wir uns der Schreibweise in meiner Arbeit[3] bedienen.

Wir betrachten $qn$ Kreise ${}_{(1)}\mathfrak{K}$, ${}_{(2)}\mathfrak{K}$, ..., ${}_{(q)}\mathfrak{K}$ in $R_N$, die durch die Kugelpaare

$$(21)\qquad \underbrace{\mathfrak{x}^{\alpha},\ \tilde{\mathfrak{x}}^{\lambda},\ \cdots}_{q} \quad [\alpha, \lambda = 1, \ldots, pn]$$

dargestellt werden.

Wir definieren zu (2) analog

$$(22)\qquad \tilde{A}^{\lambda\mu} = (\tilde{\mathfrak{x}}^{\lambda}\tilde{\mathfrak{x}}^{\mu}), \ldots$$

wobei

$$(23)\qquad \tilde{A}^{\lambda\mu} = \tilde{A}^{\mu\lambda}, \ldots$$

sind und setzen

$$(24)\qquad \tilde{A} = |\tilde{A}^{\lambda\mu}| > 0, \ldots$$

voraus.

Dann haben wir für ${}_{(2)}\mathfrak{K}$, ... die Büscheltransformationen

$$(25)\qquad \tilde{\mathfrak{x}}^{\lambda} = \tilde{c}^{\lambda}_{\mu}\,\tilde{\mathfrak{x}}^{\mu}, \ldots$$

zu berücksichtigen.

Die $\tilde{c}^{\lambda}_{\mu}$, ... in (25) sind aber von den $c^{\alpha}_{\beta}$ in (11) völlig unabhängige neue Gröszen.

In

(3) NAKAZIMA, , a. a .O., S. 234.

$$(26) \qquad S^{\beta\lambda} = (\mathfrak{x}^{\alpha}\tilde{\mathfrak{x}}^{\lambda}), \ldots$$

haben wir ein Gröszensystem, bei dem beide Arten von Indizes vorkommen, einen "*gemischten*" Tensor, der sich nach

$$(27) \qquad \overset{*}{S}{}^{\alpha\lambda} = C^{\alpha}_{\beta}\tilde{C}^{\lambda}_{\mu}S^{\beta\mu}, \ldots$$

transformiert.

Wir schliessen nun den Fall aus, dass die Matrix

$$(28) \qquad \| \mathfrak{x}^{\mathrm{I}}, \mathfrak{x}^{\mathrm{II}}, \ldots, \mathfrak{x}^{pn}, \tilde{\mathfrak{x}}^{\mathrm{I}}, \tilde{\mathfrak{x}}^{\mathrm{II}}, \ldots, \tilde{\mathfrak{x}}^{pn} \| \equiv 0$$

ist und die lineare Beziehung der Form

$$(29) \qquad \sigma_{\alpha}\mathfrak{x}^{\alpha} = \tilde{\sigma}_{\lambda}\tilde{\mathfrak{x}}^{\lambda}$$

gilt.

Die Bedeutung von (29) ist aber die, dass es eine Kugel

$$(30) \qquad \mathfrak{z} = \sigma_{\alpha}\mathfrak{x}^{\alpha} = \tilde{\sigma}_{\lambda}\tilde{\mathfrak{x}}^{\lambda}$$

gibt, auf der $qn$ Kreise liegen.

Denken wir uns jetzt eine Kugelschar

$$(31) \qquad \mathfrak{x}^{\alpha}(t) \quad [\alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \ldots, pn],$$

dann ist es klar, dass

$$(32) \qquad (\mathfrak{x}^{\alpha}\mathfrak{x}^{\beta})$$

invariant ist bei der Parametertransformation

$$(33) \qquad t = f(\bar{t})$$

d. h.

$$(34) \qquad [\mathfrak{x}^{\alpha}(t)\,\mathfrak{x}^{\beta}(t)] = [\mathfrak{x}^{\alpha}(\bar{t})\,\mathfrak{x}^{\beta}(\bar{t})].$$

Aus (14) können wir

$$(35) \qquad \overset{*}{A}_{\alpha\beta} = c^{\gamma}_{\alpha}c^{\delta}_{\beta}A_{\gamma\delta}$$

beweisen.

Nun setzen wir

$$(36) \qquad \overset{c}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha} \equiv d\mathfrak{x}^{\alpha}/dt - B^{\beta\alpha}\cdot A_{\beta\gamma}\mathfrak{x}^{\gamma}$$

und nennen die $\overset{c}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha}$ die "*modifizierten Ableitungen*" der Kugel $\mathfrak{x}^{\alpha}$.

Die $\overset{c}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha}$ transformieren sich dann nach

$$(37) \qquad \overset{c}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha} = c^{\alpha}_{\tau}(\overset{c}{\mathfrak{x}}{}^{\tau})^{*}$$

wie bei den gewöhnlichen $\dot{\mathfrak{x}}^{\alpha}$.

Dabei ist

$$(38) \qquad B^{\alpha\beta}(\mathfrak{x}^{\alpha}\dot{\mathfrak{x}}^{\beta}).$$

Weiter bestehen die Sätze in meiner Arbeit.(4)

Wir denken uns nun die folgenden Parametersubstitutionen

$$(39) \qquad t = f(\bar{t})$$

und setzen

$$(40) \qquad \mathfrak{x}^{\alpha}(t) = \mathfrak{x}^{\alpha}[f(\bar{t})] = \bar{\mathfrak{x}}^{\alpha}(\bar{t});$$

es gilt

$$(41) \qquad d\mathfrak{x}^{\alpha}/dt = d\bar{\mathfrak{x}}^{\alpha}/d\bar{t} \cdot d\bar{t}/dt = d\bar{\mathfrak{x}}^{\alpha}/d\bar{t} \cdot 1/f'$$

wobei

$$(42) \qquad f' = dt/d\bar{t}$$

gesetzt ist. Ferner gilt

$$(43) \qquad \begin{cases} A^{\alpha\beta} = \bar{A}^{\alpha\beta}, \quad A_{\alpha\beta} = \bar{A}_{\alpha\beta}, \quad B^{\alpha\beta} = \bar{B}^{\alpha\beta} \cdot 1/f', \\ E_{\alpha\beta} = \bar{E}_{\alpha\beta}, \quad \overset{c}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha} = \bar{\overset{c}{\mathfrak{x}}}{}^{\alpha} \cdot 1/f', \quad T^{\alpha\beta} = \bar{T}^{\alpha\beta} \cdot 1/(f')^{2}. \end{cases}$$

Hier wird $E_{\alpha\beta}$ definiert durch

$$(44) \qquad E_{\alpha\beta} = \begin{Bmatrix} 0 & A^{-\frac{1}{2}} \\ -A^{-\frac{1}{2}} & 0 \end{Bmatrix}.$$

Weiter bestehen

$$(45) \qquad \begin{cases} d/dt \cdot T^{\alpha\beta} = G^{\beta\alpha} + B^{\varepsilon\alpha}A_{\varepsilon\tau}T^{\beta\tau} + G^{\alpha\beta} + B^{\varepsilon\beta}A_{\varepsilon\tau}T^{\alpha\tau}, \\ d/dt \cdot (A_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}) = 2\, A_{\alpha\beta}G^{\alpha\beta}, \qquad \text{u. s. w.,} \end{cases}$$

wie in meiner Arbeit.(5)

---

(4) NAKAZIMA, S.: Kugelgeo. von MÖBIUS, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. 2, S. 36.

(5) NAKAZIMA, a. a. O., S. 15.

Wenn

$$(46)\qquad \mathfrak{x}^{\alpha},\ \bar{\mathfrak{x}}^{\beta},\ \bar{\bar{\mathfrak{x}}}^{\gamma},\ \ldots \qquad [\alpha, \beta, \gamma = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \ldots, \mathrm{N}]$$

gelten, so folgen

$$(47)\qquad A^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta = 0\,,\quad \bar{A}^{\lambda\mu}\rho_\lambda\rho_\mu = 0\,,\quad \bar{\bar{A}}^{\gamma\delta}\rho_\gamma\rho_\delta = 0\ldots$$

dann erhalten wir

$$f(A^{\alpha\beta},\ \bar{A}^{\lambda\mu},\ A^{\gamma\delta},\ \ldots) = 0\,,$$

wo $f$ eine N Beziehung zwischen $A^{\lambda\beta}$, $\bar{A}^{\lambda\mu}$, $\bar{\bar{A}}^{\gamma\delta}$, ... ... und $\rho_\alpha$ Parameter sind.

In unserem Falle ist $f$ eine Invariante.

Weiter können wir

$$\cos^2\varphi = \rho_\alpha\rho_\beta T^{\alpha\beta}$$

in meiner Arbeit[6] auch in unserem Falle beweisen.

Wir können eine DUPINsche Zykleide wie oben untersuchen.[7]

(**B**) Wir betrachten zwei Kreise $\mathfrak{K}$, $\bar{\mathfrak{K}}$ in $R_N$, die durch die beiden Kugelpaare $\mathfrak{x}^\alpha$ und $\bar{\mathfrak{x}}^\lambda$ $[\alpha, \lambda=\mathrm{I}, \mathrm{II}, \ldots, p]$ dargestellt werden, wo $\mathfrak{x}^\alpha$ und $\bar{\mathfrak{x}}^\lambda$ die Kugeln in $R_N$ sind.

Ist $\mathfrak{y}=\rho_\alpha\mathfrak{x}^\alpha$ eine normierte Kugel durch $\mathfrak{K}$ mit

$$(1)\qquad \tilde{\mathfrak{y}}\,\tilde{\mathfrak{y}} = \tilde{\rho}_\alpha\tilde{\rho}_\beta A^{\alpha\beta} = 1\,,$$

so gilt

$$(2)\qquad \cos^2\varphi = \tilde{\rho}_\alpha\tilde{\rho}_\beta T^{\alpha\beta},$$

wo $\varphi$ der Winkel zwischen $\tilde{\mathfrak{y}}$ und $\bar{\mathfrak{K}}$ ist.

Wenn $\varphi$ $k$ oder $\bar{k}$ gleich ist, so folgt

$$(3)\qquad (T^{\alpha\beta} - kA^{\alpha\beta})\,\tilde{\rho}_\alpha\tilde{\rho}_\beta = 0$$

oder

$$(4)\qquad (T^{\alpha\beta} - \bar{k}A^{\alpha\beta})\,\tilde{\rho}_\alpha\dot{\rho}_\beta = 0\,;$$

dann wollen wir das Tripelverhältnis Weise definieren:

---

(6) MRATUMURA, a. a. O., S. 100.
(7) NAKAZIMA, a. a. O., S. 228.

$$(5)\quad V=\frac{(T^{\alpha\beta}-kA^{\alpha\beta})\tilde{\rho}_\alpha\tilde{\rho}_\beta}{(T^{\alpha\beta}-\bar{k}A^{\alpha\beta})\tilde{\rho}_\alpha\tilde{\rho}_\beta}\cdot\frac{(T^{11}-\bar{k}A^{11})(T^{22}-\bar{k}A^{22})-(T^{12}-\bar{k}A^{12})^2}{(T^{11}-kA^{11})(T^{22}-kA^{22})-(T^{12}-kA^{12})^2}.$$

Wenn

$$(6)\quad (T^{11}-\bar{k}A^{11})(T^{22}-\bar{k}A^{22})=(T^{12}-\bar{k}A^{12})^2,$$

so folgt

$$(7)\quad V=0.$$

Im folgenden betrachten wir (3) und zwei quadratische Flächen, gegeben durch die Gleichungen

$$T^{\alpha\beta}\tilde{\rho}_\alpha\tilde{\rho}_\beta=0 \quad \text{und} \quad A^{\alpha\beta}\tilde{\rho}_\alpha\tilde{\rho}=0;$$

dann wird (3) bestimmt durch zwei willkürliche Flächen im Büschel

$$(8)\quad (T^{\alpha\beta}-kA^{\alpha\beta})\tilde{\rho}_\alpha\tilde{\rho}_\beta=0,$$

wenn $k$ ein Parameter ist.

Unter den Flächen in (8) gibt es einen Kegel, dessen Parameterwerte man aus der Gleichung in $k$

$$(9)\quad |T^{\alpha\beta}-kA^{\alpha\beta}|=0$$

bestimmt.

(**C**) Betrachten wir

$$(1)\quad G_{\alpha\beta}\overset{(a)}{\xi^\alpha}\overset{(b)}{\xi^\beta}=[a,b]$$

in MIKAMIS Arbeit,[1] und setzen

$$(2)\quad \begin{vmatrix} [1,1], & [0,1], & \cdots, & [1,a] \\ [1,0], & [1,1], & \cdots, & [1,a] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\ [a,0], & [a,1], & \cdots, & [a,a] \end{vmatrix} \equiv D_a,\ D_0=1,$$

so erhalten wir

(1) MIKAMI, M.: A generalisation of Seret-Frenct formulae in an n-dimensional space, Tensor (1938), Sapporo, S. 26.

$$\eta^\lambda = \frac{1}{\sqrt{(D_{a-1}D_a)}} \begin{vmatrix} [1,1], \dots, [1,a-1], \overset{(1)}{\xi}{}^\lambda \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ [a,1], \dots, [a,a-1], \overset{(a)}{\xi}{}^\lambda \end{vmatrix}, \qquad [a=1, \dots, n]$$

$$(3) \quad \begin{cases} \overset{(r,s)(a)}{D} \eta^\lambda \sum_{b=1}^{n} G_{ab} \overset{(b)}{\eta}{}^\lambda, & G_{ab} = G_{\lambda\mu} \overset{(r,s)(a)}{D} \eta^\lambda \overset{(b)}{\eta}{}^\mu, \\ G_{\lambda\mu} \overset{(a)}{\eta}{}^\lambda \overset{(b)}{\eta}{}^\mu = \delta^a_b, & G_{ac} + G_{ba} = -(\overset{(r,s)}{D} G_{\lambda\mu}) \overset{(a)}{\eta}{}^\mu \overset{(b)}{\eta}{}^\mu, \\ G_{ab} = 0, & |b-a| \geq 2, \\ G_{a,a+1} = G_{\lambda\mu} \overset{(r,s)(a)}{D} \eta^\lambda \overset{(a+1)}{\eta}{}^\mu = \dfrac{\sqrt{D_{a-1} D_{a+1}}}{D_a} \end{cases}$$

und endlich ergeben sich

$$(4) \quad \begin{cases} \overset{(r,s)(1)}{D} \eta^\lambda = \overset{(r,s)}{D} \eta^\lambda = G_{1,1} \overset{(1)}{\eta}{}^\lambda + G_{1,2} \overset{(2)}{\eta}{}^\lambda, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \overset{(r,s)(a)}{D} \eta^\lambda = G_{a,1} \overset{(1)}{\eta}{}^\lambda + \dots + G_{a,a} \overset{(a)}{\eta}{}^\lambda + G_{a,a+1} \overset{(a+1)}{\eta}{}^\lambda, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \overset{(r,s)(n)}{D} \eta^\lambda = G_{n1} \overset{(1)}{\eta}{}^\lambda + \dots + G_{nn} \overset{(n)}{\eta}{}^\lambda \end{cases}$$

als ähnliche Formeln[2] von FRENET.

(**D**) $\overset{(i)}{\mathfrak{x}}$ $[i=1, 2, \dots, N]$ seien die Kugeln im $R_N$, dann können wir mit

$$\mathfrak{x}^a \ [a = I, II, \dots, N]$$

zwei Punkte d. h. eine Gerade im $R_N$ bestimmen.

Betrachten wir eine Geraden-Kugeltransformation und wollen diese Transformation der Einfachheit halber mit S bezeichnen.

Betrachten wir alle Berührungstransformationen im $R_N$ -Raume, durch welche alle orientierten Kugeln in die orientierten Kugeln transformiert werden, und bezeichnen solche Transformationen mit $\sum$, dann

(2) DAVIES, E. T.: Analogues of the Frent formulae determined by deformation operators, The Journ. of the London Math. Society Vol. 13 (1938), p. 210.

kann die zusammengesetze Transformation

$$S \sum S^{-1}$$

entweder als eine Kollineation oder als eine Korrelation betrachtet werden.(1)

(**E**) Jede Kugel $\mathfrak{x}$ des Büschels $(\mathfrak{a}, \mathfrak{B})$ in $R_N$ kann dargestellt werden in der Form

$$(1) \qquad \mathfrak{x} = \mathfrak{a} - \lambda \mathfrak{B},$$

wo $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{B}$ zwei Kugeln in $R_N$ und $\lambda$ eine Skalare ist.

Aus (1) folgt

$$(2) \qquad (\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = (\mathfrak{a}\mathfrak{a}) - 2\lambda(\mathfrak{a}\mathfrak{B}) + \lambda^2(\mathfrak{B}\mathfrak{B}).$$

Wenn $\mathfrak{x}$ ein Punkt ist, so muss

$$(3) \qquad (\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = 0$$

sein. Daher erhalten wir folgende in $\lambda$ quadratische Gleichung

$$(4) \qquad \lambda^2(\mathfrak{B}\mathfrak{B}) - 2\lambda(\mathfrak{a}\mathfrak{B}) + (\mathfrak{a}\mathfrak{a}) = 0,$$

deren Wurzeln $\lambda_1$ und $\lambda_2$ in der Gleichung (1) eingesetzt sind, und zwar diese beiden bilden den linearen Büschel $(\mathfrak{a}_2 \mathfrak{B})$.

Wir haben also

$$(5) \qquad \mathfrak{x}_1 = \mathfrak{a} - \lambda_1\mathfrak{B}, \quad \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{a} - \lambda_2\mathfrak{B};$$

folglich wird das Doppelverhältnis der vier Kugeln $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$:

$$(6) \qquad (\mathfrak{a}, \mathfrak{B}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = \lambda_1/\lambda_2.$$

Die Auflösung der Gleichung (4) ergibt aber

$$(7) \qquad \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{(\mathfrak{a}\mathfrak{B}) + \sqrt{(\mathfrak{a}\mathfrak{B})^2 - (\mathfrak{a}\mathfrak{a})(\mathfrak{B}\mathfrak{B})}}{(\mathfrak{B}\mathfrak{B})}, \\[2ex] \lambda_2 = \dfrac{(\mathfrak{a}\mathfrak{B}) - \sqrt{(\mathfrak{a}\mathfrak{B})^2 - (\mathfrak{a}\mathfrak{a})(\mathfrak{B}\mathfrak{B})}}{(\mathfrak{B}\mathfrak{B})}. \end{cases}$$

Nun können wir setzen

---

(1) KUBOTA, T.: Einige Bemerkungen zur LIEschen Kugelgeo., Sci. Report of the Tôhoku Imp. Univ., Vol. IX, S. 2.

(8) $\quad (\mathfrak{a}\mathfrak{a}) = 1, \quad (\mathfrak{a}\mathfrak{B}) = \cos\varphi, \quad (\mathfrak{B}\mathfrak{B}) = 1,$

wobei $\varphi$ ein eingeschlossener Winkel von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{B}$ ist.

Daher wird

(9) $$\begin{cases} \lambda_1 = \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}, \\ \lambda_2 = \cos\varphi - i\sin\varphi = e^{-i\varphi}. \end{cases}$$

Mithin ist

(10) $\quad e^{2i\varphi} = \lambda_1/\lambda_2 = (\mathfrak{a}, \mathfrak{B}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$

oder

(11) $\quad \varphi = -\, i/2 \lg(\mathfrak{a}, \mathfrak{B}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2),$

Aus (10) ergibt sich für $\psi = \frac{\pi}{2}$

(12) $\quad (\mathfrak{a}, \mathfrak{B}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = -1,$

für $\varphi=0$ oder $\varphi=\pi$ erhalten wir aus der Gleichung (10)

(13) $\quad \lambda_1 = \lambda_2.$

Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Punkte in (12), so setzen wir $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{p}_2$, wonach sich aus (12) ergibt:

(14) $\quad (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = -1.$

(F) Setzen wir die Kugeln

(1) $\quad \xi^\alpha, \ \bar{\xi}^\lambda \quad [\alpha, \lambda = \mathrm{I}, \mathrm{II}]$

in $R_N$ in der Form

(2) $\quad \rho = \rho^\alpha, \quad \bar{\rho} = \bar{\rho}_\lambda \bar{\xi}^\lambda$

und führen die Abkürzungen ein:

(3) $\quad (\xi^\alpha \xi^\beta) = A^{\alpha\beta}, \quad (\bar{\xi}^\lambda \bar{\xi}^\mu) = \bar{A}^{\lambda\mu},$

so musz wegen

(4) $\quad (\rho\rho) = 0, \quad (\bar{\rho}\,\bar{\rho}) = 0$

gelten

(5) $\quad \rho_\alpha \rho_\beta A^{\alpha\beta} = 0, \quad \bar{\rho}_\lambda \bar{\rho}_\mu \bar{A}^{\lambda\mu} = 0.$

Zwei Punkte $\zeta$, $\bar{\zeta}$ im $R_N$ werden durch

$$(6)\qquad \begin{cases} \zeta = \rho_\alpha \xi^\alpha & \text{mit} \quad \rho_\alpha \rho_\beta A^{\alpha\beta} = 0\,, \\ \bar{\zeta} = \bar{\rho}_\alpha \bar{\xi}^\alpha & \text{mit} \quad \bar{\rho}_\alpha \bar{\rho}_\beta \bar{A}^{\alpha\beta} = 0 \end{cases}$$

gegeben, und wenn beide Punkte $\zeta$, $\bar{\zeta}$ zusammenfallen, dann ist

$$(\zeta\,\bar{\zeta}) = 0\,.$$

Wenn $\xi^\alpha$ sich transformieren bei den Büscheltransformationen

$$(7)\qquad \xi^\alpha = c^\alpha_\beta \overset{*}{\xi}{}^\beta, \quad |c^\alpha_\beta| \neq 0\,,$$

dann folgt

$$(8)\qquad A^{\alpha\beta} = C^\alpha_\gamma C^\beta_\delta \overset{*}{A}{}^{\gamma\delta},$$

die wegen $A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha}$ einen symmetrischen Tensor zweiter Stufe bildet;

Wenn ein Punkt $\zeta$ auf einer Fläche $\mathfrak{y}(u^1, u^2)$ liegt, dann folgt $(\zeta\mathfrak{y})=0$, wo $u^i$ Parameter sind.

Ist $\zeta(u^1, u^2)$ die Tangentenfläche von $\bar{\zeta}(u^1, u^2)$, dann folgt

$$(9)\qquad (\zeta \cdot \partial \bar{\zeta} / \partial u^i) = 0\,,$$

d. h.

$$(10)\qquad \rho_\alpha \bar{\rho}_\lambda D^{\alpha\lambda} = 0\,,$$

wobei

$$D^{\alpha\lambda} = (\xi^\alpha \bar{\xi}^\lambda)$$

sind.

Wenn

$$(11)\qquad S^{\alpha\lambda} = (\xi^\alpha \xi^\lambda)$$

ein gemischter Tensor ist, so transformiert sie sich durch (7) wie folgendes:

$$(12)\qquad \overset{*}{S}{}^{\alpha\lambda} = C^\alpha_\beta \bar{C}^\lambda_\mu S^{\beta\mu}.$$

Wir schliessen nun den Fall aus, dass die Matrix

$$(13)\qquad \| \xi^{\mathrm{I}}, \xi^{\mathrm{II}}, \bar{\xi}^{\mathrm{I}}, \bar{\xi}^{\mathrm{II}} \| = 0$$

ist, in der eine lineare Beziehung zwischen $\zeta$, $\bar{\zeta}$ besteht,

d. h.

(14) $\sigma_\alpha \xi^\alpha = \bar{\sigma}_\lambda \bar{\xi}^\lambda$,

wo $\sigma_\alpha$, $\bar{\sigma}_\lambda$ skalare Gröszen sind.

(G) Es seien

(1) $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \cdots, \mathfrak{x}_N$

N beliebige linear unabhängige Kngeln in $R_N$, dann sei ein beliebiges Punktepaar $\mathfrak{x}$ mit

(2) $\mathfrak{x} = a_1\mathfrak{x}_1 + a_2\mathfrak{x}_2 + \dots + a_n\mathfrak{x}_N$

gegeben, wo $a_i$ Konstanten sind.

Aus (2) folgt

(3) $(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = a_1^2(\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_1) + 2a_1a_2(\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2) + \dots + a_N^2(\mathfrak{x}_{N-1}\mathfrak{x}_N) = 0$.

Die Discriminante der vorhergehenden Gleichung ist:

$$(4)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_1, & \mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2, & \cdots, & \mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_N \\ \mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_1, & \mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_2, & \cdots, & \mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_N \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{x}_N\mathfrak{x}_1, & \mathfrak{x}_N\mathfrak{x}_2, & \cdots, & \mathfrak{x}_N\mathfrak{x}_N \end{vmatrix}.$$

Es ist nachzuweisen, dasz dieselbe verschwindet, wenn $(\mathfrak{x}_i\mathfrak{x}_i)=0$, d. h. $\mathfrak{x}_i$ ein Punkt ist.

Aus (2) folgen

$$(5)\qquad \begin{cases} (\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1) = (\mathfrak{x}\mathfrak{x}_2) = (\mathfrak{x}\mathfrak{x}_3) = \dots = (\mathfrak{x}\mathfrak{x}_N) = 0, \\ 0 = a_1(\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_1) + a_2(\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2) + \cdots + a_N(\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_N), \\ 0 = a_1(\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_1) + a_2(\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_2) + \cdots + a_N(\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_N), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 = a_1(\mathfrak{x}_N\mathfrak{x}_1) + a_2(\mathfrak{x}_N\mathfrak{x}_2) + \cdots + a_N(\mathfrak{x}_N\mathfrak{x}_N). \end{cases}$$

Da diese Gleichungen neben einander gelten müssen, so ist in der That

$$(6)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} (\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_1), & (\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2), & \cdots, & (\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_N) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\ (\mathfrak{x}_N\mathfrak{x}_1), & (\mathfrak{x}_N\mathfrak{x}_2), & \cdots, & (\mathfrak{x}_N\mathfrak{x}_N) \end{vmatrix} = 0 .$$

(**H**)

$$(1)\qquad \mathfrak{y}\mathfrak{y} = \mathfrak{y}\,\bar{\mathfrak{y}} = \bar{\mathfrak{y}}\,\bar{\mathfrak{y}} = 0$$

ist die Bedingung für das Zusammenfallen der beiden Punkte $\mathfrak{y}$ und $\bar{\mathfrak{y}}$ in $R_N$.

Wenn $\mathfrak{y}$ zu allen Nachbarn von $\bar{\mathfrak{y}}$ senkrecht sind, dann wird

$$(2)\qquad \mathfrak{y}\,\bar{\mathfrak{y}}_u = \mathfrak{y}\,\bar{\mathfrak{y}}_v = 0$$

erfüllt.

Setzen wir

$$(3)\qquad \bar{\mathfrak{y}}_v = \rho\mathfrak{y} + \sigma\bar{\mathfrak{y}}, \quad \bar{\mathfrak{y}}_u = \bar{\rho}\,\bar{\mathfrak{y}} + \bar{\sigma}\,\mathfrak{y},$$

so folgt

$$(4)\qquad \bar{\mathfrak{y}}_u\bar{\mathfrak{y}}_v = 0,$$

wo $\rho$, $\bar{\rho}$, $\sigma$, $\bar{\sigma}$ skalare Gröszen sind.

Aus (4) folgt, dasz zwei Punkte

$$\bar{\mathfrak{y}} + \bar{\mathfrak{y}}_u \quad \text{und} \quad \bar{\mathfrak{y}} + \bar{\mathfrak{y}}_v$$

miteinander zusammenfallen.

Aus (1), (3) folgt

$$(5)\qquad (\bar{\mathfrak{y}}_v\bar{\mathfrak{y}}_v) = (\bar{\mathfrak{y}}_u\bar{\mathfrak{y}}_u) = (\bar{\mathfrak{y}}_v\bar{\mathfrak{y}}_u) = 0 .$$

Vorausgesetzt, dasz

$$(6)\qquad \mathfrak{y}_v = a\mathfrak{y} + \bar{\mathfrak{y}}, \quad \bar{\mathfrak{y}}_u = \bar{a}\,\bar{\mathfrak{y}} + \mathfrak{y}$$

gegeben sind, dann erfolgt

$$(7)\qquad (\mathfrak{y}_u\mathfrak{y}_v) = 0,$$

wo $a$, $\bar{a}$ zwei skalare Gröszen sind.

Aus (7) folgt das Zusammenfallen der zwei Punkte

$$(8)\qquad \mathfrak{y}+\mathfrak{y}_u \quad \text{und} \quad \mathfrak{y}+\mathfrak{y}_v .$$

(I) Es seien $\xi, \eta$ und $\bar{\eta}$ drei Kugeln in $R_N$, so erfolgen

$$(1)\qquad \cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2=\{(\xi\eta)^2(\bar{\eta}\bar{\eta})+(\xi\bar{\eta})^2(\eta\eta)\}:(\xi\xi)(\eta\eta)(\bar{\eta}\bar{\eta}).$$

$$(2)\qquad \cos^2\theta_1\cdot\cos^2\theta_2=(\xi\eta)^2(\xi\bar{\eta})^2:(\xi\xi)^2(\eta\eta)(\bar{\eta}\bar{\eta}),$$

wo $\theta_1$ der Winkel zwischen $\xi$ und $\eta$, $\theta_2$ der Winkel zwischen $\xi$ und $\bar{\eta}$ ist.

Wenn (3) $\cos\theta_1=\pm i\cos\theta_2$ gilt, so haben wir

$$(4)\qquad (\xi\eta)^2(\bar{\eta}\bar{\eta})+(\xi\bar{\eta})^2(\eta\eta)=0.$$

(J) Haben die beiden Kugelbüschel $\lambda\xi+\mathfrak{x}$ und $\lambda'(\xi+d\xi)+\nu(\mathfrak{x}+d\mathfrak{x})$ in $R_N$ ein gemeinsames Element, so soll

$$(1)\qquad \lambda\xi+\mathfrak{x}=\lambda'(\xi+d\xi)+\nu(\mathfrak{x}+d\mathfrak{x})$$

sein, woraus gilt

$$(2)\qquad \lambda\nu^{-1}d\xi+d\mathfrak{x}=0.$$

Setzen wir nun

$$\lambda\nu^{-1}=P_i^{-1},$$

so folgt aus (2)

$$(3)\qquad d\xi+P_i d\mathfrak{x}=0,$$

so erhalten wir[(1)]

$$(4)\qquad (d\xi d\xi)+P_i(d\mathfrak{x}d\xi)=0.$$

Nun setzen wir

$$(5)\qquad (d\mathfrak{x}d\xi)=G_{ij}\,du^i\,du^j,$$

wo $d\mathfrak{x}$, $d\xi$ zwei gegebene Fortschreitungsrichtungen bedeuten.

Ihr Winkel $\theta$ wird gegeben durch

$$\cos\theta=G_{ij}\,du^i\,du^j,$$

(1) TAKASU, T.: Differentialgeometrien in den Kugelräumen, Tokyo, (1938), S. 226.

also wenn $G_{ij} \equiv 0$, dann $\theta = \frac{\pi}{2}$ oder $(d\xi d\xi) = 0$ wir nennen $(d\xi d\xi)$ die Minimalkugelscharen.

(**K**) Wir betrachten

$$(1) \qquad \lambda \mathfrak{N} = \mathfrak{z} + i\xi$$

und

$$(2) \qquad \bar{\lambda} \bar{\mathfrak{N}} = \mathfrak{z} - i\xi, \quad i = \sqrt{-1},$$

wo $\mathfrak{z}$, $\xi$ zwei Kugeln in $R_N$ und $\xi \perp \mathfrak{z}$ gilt.

$\mathfrak{N}$ und $\bar{\mathfrak{N}}$ in (1), (2) bezeichnen zwei Punkte in $R_N$, wo $\lambda$, $\bar{\lambda}$ zwei Parameter sind.

Aus (1), (2) folgt

$$(3) \qquad \lambda \bar{\lambda} (\mathfrak{N} \bar{\mathfrak{N}}) = 2.$$

Führen wir jetzt die Forderungen

$$(4) \qquad (\mathfrak{N} \bar{\mathfrak{N}}) = 2, \quad (\mathfrak{N}\, d\bar{\mathfrak{N}}) = -(\bar{\mathfrak{N}}\, d\mathfrak{N}) = 0$$

ein, so folgt

$$(5) \qquad \lambda \bar{\lambda} = 1$$

und dadurch sind $\mathfrak{N}$. $\bar{\mathfrak{N}}$, $\lambda$ und $\bar{\lambda}$ bis auf den konstanten Faktor schon wohl dormiert.

Aus (1) und (2) ergeben sich

$$(6) \qquad \xi = 1/2i \cdot (\lambda \mathfrak{N} - \bar{\lambda} \bar{\mathfrak{N}}). \quad \mathfrak{z} = 1/2 \cdot (\mathfrak{N} + \bar{\lambda} \bar{\mathfrak{N}}).$$

Wir können leicht beweisen. dasz aus (1), (2) erfolgt

$$(7) \qquad (\mathfrak{N} \bar{\mathfrak{N}}) = (\mathfrak{z}\mathfrak{z}) + (\xi \xi) = 2;$$

darin können wir sehen, dasz der Abstand zwischen $\mathfrak{N}$ und $\bar{\mathfrak{N}}$ gleich $\sqrt{2}$ ist.

In (1), (2) sehen wir, dasz

$$(8) \qquad \lambda\, d\mathfrak{N} = d\mathfrak{z} + i\,d\xi, \quad \bar{\lambda}\, d\bar{\mathfrak{N}} = d\mathfrak{z} - i\,d\xi$$

ist, so folgt

$$(9) \qquad (d\mathfrak{N} d\bar{\mathfrak{N}}) = (d\mathfrak{z} d\mathfrak{z}) + (d\xi d\xi)$$

oder

(10) $\quad ds^2 = d\sigma^2 + d\bar{\sigma}^2,$

wo $ds^2 = (d\mathfrak{N} d\ddot{\mathfrak{N}})$, $d\mathfrak{z} d\mathfrak{z}) = d\sigma^2$ und $(d\mathfrak{c} d\mathfrak{c}) = d\bar{\sigma}^2$ gesetzt sind.

$(d\mathfrak{z} d\mathfrak{z})$ bezeichnet $\cos\alpha$, wo $\alpha$ den Winkel zwischen zwei konsekutiven Kugeln von $\mathfrak{z}$ bezeichnet.

Von $(d\mathfrak{c} d\mathfrak{c})$ gilt dasselbe.

(**L**) Wir betrachten die folgenden Transformationen

(1) $\quad \bar{\mathfrak{x}}^A = \bar{P}^A_B \bar{\mathfrak{x}}^B, \quad \bar{\mathfrak{x}}^B = P^B_C \mathfrak{x}^C,$

so erfolgen

(2) $\quad \ddot{\mathfrak{x}}^A = \overset{*}{P}{}^A_C \mathfrak{x}^C, \quad [A, B, C = I, II, \ldots, m], \quad m < N,$

wo

(3) $\quad \overset{*}{P}{}^A_C = \bar{P}^A_B P^B_C$

gilt, da $\mathfrak{x}^\alpha$, $\bar{\mathfrak{x}}^\alpha$, $\ddot{\mathfrak{x}}^\alpha$ die Kugeln in $R_N$ sind.

(**M**) Wir betrachten

(1) $\quad \mathfrak{z} = \mathfrak{x}^I + \mathfrak{x}^{II},$

wo $\mathfrak{x}^\lambda$ $[\alpha = I, II]$ zwei Punkte in $R_N$ sind, so folgt

(2) $\quad (\mathfrak{z}\,\mathfrak{z}) = 2(\mathfrak{x}^I \mathfrak{x}^{II}) = 2A^{I\,II},$

darin können wir sehen, dasz

(3) $\quad (\mathfrak{z}\,\mathfrak{z}) = 2l^2$

gilt, wo $l$ der Abstand zwischen $\mathfrak{x}^I$ und $\mathfrak{x}^{II}$ ist.

Wir können auch zwei neue Punkte

(4) $\quad \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^\alpha = \sum_{\beta=I}^{II} c^\alpha_\beta \mathfrak{x}^\beta \quad [\alpha = I, II]$

als Linearkombinationen der $\mathfrak{x}^\alpha$ mit Koeffizienten $c^\alpha_\beta$ und können dann ebensogut durch die $\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^\alpha$ unsern Punkt darstellen. Weiter kann man wissen wie in (**A**).

(**N**) Sind zwei Kugeln $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{A}$ aufeinander senkrecht, so folgt

(1) $\quad \mathfrak{a}\mathfrak{A} = 0$

wo wir annehmen, dasz

$$(2) \qquad \mathfrak{a}_i \mathfrak{A} = \mathfrak{a} \mathfrak{A}_i = 0$$

gilt.

Aus (2) ergibt sich

$$(3) \qquad \mathfrak{a}_i \mathfrak{A}_j = \mathfrak{a}_j \mathfrak{A}_i = - \mathfrak{a}_{ij} \mathfrak{A} = - \mathfrak{a} \mathfrak{A}_{ij} = g_{ij}.$$

Nun setzen wir

$$(4) \qquad \mathfrak{b} = \tfrac{1}{2} g^{rs} \mathfrak{a}_{rs} + \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{B} = \tfrac{1}{2} g^{rs} \mathfrak{A}_{rs} + \mathfrak{A}$$

so folgt

$$(5) \qquad \mathfrak{b} \mathfrak{A} = \text{const.}, \quad \mathfrak{a} \mathfrak{B} = \text{const.}$$

wo $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ die Kugeln sind.

In (5) können wir sehen, dasz der Winkel zwischen $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{A}$ konstant ist. Von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{B}$ gilt das Gleiche.

## ( 2 )

Im folgenden untersuchen wir den Fall, wo die Kugel $\mathfrak{x}$ in $R_N$ eine Relation erfüllt.

(**A**) Wenn

$$(1) \qquad \mathfrak{x}_{u} = \mathfrak{x}$$

oder

$$(2) \qquad \mathfrak{x}_{v} = \mathfrak{x}$$

gilt, so muss $\mathfrak{x}$ ein Punkt sein, wo $\mathfrak{x}$ die Kugel in $R_N$ und $\partial\mathfrak{x}/\partial i = \mathfrak{x}_i$ ist.

(**B**) Wenn

$$(1) \qquad \mathfrak{x}_{uu} = \mathfrak{x}_{u}$$

besteht, so folgt

$$(2) \qquad (\mathfrak{x}_{u}, \mathfrak{x} + \mathfrak{x}_{v}) = 0,$$

oder

$$(3) \qquad (\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v) = 0,$$

denn aus $\mathfrak{x}^2 = 1$ erfolgt

$$(4) \qquad \mathfrak{x}\mathfrak{x}_u = 0$$

oder

$$(5) \qquad \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_u + \mathfrak{x}\mathfrak{x}_{uu} = 0.$$

In (3) können wir sehen, dasz $\mathfrak{x}_u$ und $\mathfrak{x}_v$ aufeinander senkrecht sind.

Von dem Falle

$$(6) \qquad \mathfrak{x}_{vv} = \mathfrak{x}_v$$

oder

$$(7) \qquad \mathfrak{x}_{uv} = \mathfrak{x}_u$$

gilt das Gleiche.

(**C**) Im folgenden untersuchen wir den Fall, wo de die Kugel $\mathfrak{x}$ in $R_N$ LAPLACES Gleichung

$$(1) \qquad \mathfrak{x}_{uv} + (\ \ )\mathfrak{x}_u + (\ \ )\mathfrak{x}_v = 0$$

erfüllt.

Aus $\mathfrak{x}^2 = 1$ erfolgt

$$(2) \qquad \mathfrak{x}\mathfrak{x}_u, \quad \mathfrak{x}\mathfrak{x}_v = 0,$$

$$(3) \qquad \mathfrak{x}_a \mathfrak{x}_v + \mathfrak{x}\mathfrak{x}_{uv} = 0,$$

so ergibt sich aus (1), (2) und (3):

$$(4) \qquad \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v = 0,$$

Wir können also folgendes sagen: *Wenn die Kugel $\mathfrak{x}$ in* $R_N$ (1) *erfüllt, so müssen $\mathfrak{x}_u$ und $\mathfrak{x}_v$ aufeinander senkrecht sein.*

(**D**) Im folgenden untersuchen wir den Fall, wo die Kugel $\mathfrak{x}$ in $R_N$ die Gleichung

$$(1) \qquad \mathfrak{x}_{uu} + (\ \ )\mathfrak{x}_u + (\ \ )\mathfrak{x}_v = 0$$

erfüllt.

Aus $\mathfrak{x}^2 = 1$ erfolgt

$$(2) \qquad \mathfrak{x}\mathfrak{x}_u = 0, \quad \mathfrak{x}\mathfrak{x}_v = 0,$$

$$(3) \qquad \mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_u + \mathfrak{x}\mathfrak{x}_{uu} = 0;$$

so können wir aus (1), (2) und (3) finden:

$$(4) \qquad \mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_u = 0;$$

daraus ergibt sich

$$(5) \qquad \mathfrak{x}\mathfrak{x}_{uu} = 0.$$

Wir dürfen folglich sagen, dasz $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_{uu}$ aufeinander senkrecht sind.

(**E**) Aus

$$(1) \qquad \mathfrak{x}_{uv} + (\ )\,\mathfrak{x}_u + (\ )\,\mathfrak{x}_v = 0$$

erfolgt

$$(2) \qquad \mathfrak{x}_v\mathfrak{x}_v = 0,$$

wo $\mathfrak{x}^2 = 1$ gilt.

Aus (2) erfolgt

$$(3) \qquad \mathfrak{x}\mathfrak{x}_{vv} = 0;$$

wir können folglich wissen, dasz $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_{vv}$ aufeinander senkrecht sind.

(**F**) Aus

$$(1) \qquad (\ )\,\mathfrak{x}_{vv} + (\ )\,\mathfrak{x}_{uv} + (\ )\,\mathfrak{x}_{uu} + (\ )\,\mathfrak{x}_u + (\ )\,\mathfrak{x}_v = 0$$

folgt

$$(2) \qquad \mathfrak{x}_v\mathfrak{x}_v + (\ )\,\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v + (\ )\,\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_u = 0$$

wo $(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = 1$ gilt.

Aus (2) ergibt sich

$$(3) \qquad (\ )\,\mathfrak{x}\mathfrak{x}_{vv} + (\ )\,\mathfrak{x}\mathfrak{x}_{uv} + (\ )\,\mathfrak{x}\mathfrak{x}_{uu} = 0$$

oder

$$(4) \qquad [\mathfrak{x},\ (\ )\,\mathfrak{x}_{vv} + (\ )\,\mathfrak{x}_{uv} + (\ )\,\mathfrak{x}_{uu}] = 0;$$

wir können also erkennen, dasz

$$(5) \qquad \mathfrak{x} \perp \{(\ )\mathfrak{x}_{vv} + (\ )\mathfrak{x}_{uv} + (\ )\mathfrak{x}_{uu}\}$$

gilt.

(**G**) Wir betrachten

$$(1) \qquad n\xi = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n ,$$

wo $\xi$, $\xi_i$ die Kugeln in $R_3$ sind.

Aus (1) folgt

$$(2) \qquad n\xi'' = \xi_1'' + \xi_2'' + \cdots + \xi_n'' ,$$

daraus ergibt sich

$$(3) \qquad n\{\xi + \xi''\} = \{\xi_1 + \xi_1''\} + \{\xi_2 + \xi_2''\} + \cdots + \{\xi_n + \xi_n''\}$$

oder

$$(4) \qquad nk = k_1 + k_2 + \cdots + k_n ,$$

wo $k$, $k_i$ die Raumkurven, deren Schmiegkugeln $\xi$ bzw. $\xi_i$ sind, wo

$$(5) \qquad \xi + \xi'' \neq 0 , \quad \xi_i + \xi_i'' \neq 0$$

gelten.

(**H**) Wir nennen

$$(1) \qquad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$$

„*harmonisch*", wenn ihre Gleichung $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ die Differentialgleichung

$$(2) \qquad \partial^2\mathfrak{x} / \partial u^2 + \partial^2\mathfrak{x} / \partial v^2 = 0$$

befriedigt, und setzen uns die Aufgabe, alle harmonischen Kugeln in in $R_N$ zu bestimmen.

Zu diesem Zweck setzen wir

$$(3) \qquad (\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = 1 ,$$

so folgt

$$(4) \qquad \mathfrak{x}\mathfrak{x}_u = 0 , \quad \mathfrak{x}\mathfrak{x}_v = 0$$

d. h.

$$(5) \qquad \mathfrak{x}\mathfrak{x}_{uu} + \mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_u = 0 , \quad \mathfrak{x}\mathfrak{x}_{vv} + \mathfrak{x}_v\mathfrak{x}_v = 0 .$$

Aus (2) und (5) ergibt sich

$$(6)\qquad \mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_u + \mathfrak{x}_v\mathfrak{x}_v = 0$$

(6) ist unsere Bedingung.

Weiter ist $\mathfrak{x}$ auszer (2) noch der Integral der Wärmeleitungsgleichung

$$(7)\qquad \mathfrak{x}_{uu} + \mathfrak{x}_{vv} = \mathfrak{x}_t\,,$$

so folgt

$$(8)\qquad \mathfrak{x}_t = 0\,,$$

wo $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v, t)$ ist.

Aus (8) folgt

$$(9)\qquad \mathfrak{x} = \alpha t + \beta\,,$$

wo $\alpha$, $\beta$, $t$ Parameter sind.

## ( 3 )

Im folgenden teilen wir die Inversionsgeometrie mit.

Ist $\xi$ eine Kugel in $R_N$ und $\mathfrak{y}$, $\bar{\mathfrak{y}}$ die nicht auf ihm liegenden Punkte in $R_N$, so sind

$$(A)\qquad \mathfrak{y} = 2(\mathfrak{z}\,\xi)\,\xi - \mathfrak{z}\,,\quad \bar{\mathfrak{y}} = 2(\bar{\mathfrak{z}}\,\xi)\,\xi - \bar{\mathfrak{z}}$$

die zu $\mathfrak{z}$ bzw. $\bar{\mathfrak{z}}$ in bezug auf Kugel $\xi$ inversen Punkte.

(**A**) Aus (A) folgt

$$(1)\qquad \frac{d^k(\bar{\mathfrak{y}}-\mathfrak{y})}{ds^k} = 2\left(\frac{d^k}{ds^k}(\bar{\mathfrak{z}}-\mathfrak{z},\, \xi)\,\xi - \frac{d^k}{ds^k}(\bar{\mathfrak{z}}-\mathfrak{z})\right);$$

so ist die Berührung $n$-ter Ordnung oder $n+1-$ punktige Berührung $(n \geqq 1)$ durch die Inversion erhalten, wo

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0 + \mathfrak{z}_0' s + \mathfrak{z}_0'' \dfrac{s^2}{2!} + \cdots, \\ \bar{\mathfrak{z}} = \bar{\mathfrak{z}}_0 + \bar{\mathfrak{z}}_0' s + \bar{\mathfrak{z}}_0'' \dfrac{s^2}{2!} + \cdots \end{cases}$$

gelten.[1]

(1) Vgl. BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeo. II (1923), S. 26.

(**B**) In den pentasphärischen Koordinaten sei $\mathfrak{y}$ die Schmiegungskugel, $d\mathfrak{y}/d\theta$ die auf $\mathfrak{y}$ senkrechte THOMSENsche Normalkugel und $d^2\mathfrak{y}/d\theta^2$ diejenige Kugel, die $\mathfrak{y}$ im Kurvenpunkt $\mathfrak{x}(s)$ von auszen berührt.

Hier wollen wir den Kugelbüschel

$$(1) \qquad l \cdot d\mathfrak{y}/d\theta + d^2\mathfrak{y}/d\theta^2$$

betrachten und setzen

$$(2) \qquad \mathfrak{z} = l \cdot d\mathfrak{y}/d\theta + d^2\mathfrak{y}/d\theta^2 ,$$

wo $m$ ein Parameter ist.

Wenn $\mathfrak{z}$ den Punkt $\mathfrak{p}$ hindurch geht, so folgt

$$(3) \qquad 0 = (\mathfrak{z}\mathfrak{p}) = l \cdot (d\mathfrak{y}/d\theta \cdot \mathfrak{p}) + (d^2\mathfrak{y}/d\theta^2 \cdot \mathfrak{p}) ,$$

somit folgt (2)

$$(4) \qquad \mathfrak{z} = - \frac{(\mathfrak{z} \cdot d^2\mathfrak{y}/d\theta^2)}{(\mathfrak{z} \cdot d\mathfrak{y}/d\theta)} d\mathfrak{y}/d\theta + d^2\mathfrak{y}/d\theta^2 ,$$

(4) ist unsere Gleichung für $\mathfrak{z}$.

Nehmen wir jetzt $\mathfrak{z}$ anstatt $\mathfrak{z}$ in (A), so folgt

$$(5) \qquad \bar{\mathfrak{y}} = 2 \left( - \frac{(\mathfrak{z} \cdot d^2\mathfrak{y}) / d\theta^2}{(\mathfrak{z} \cdot d\mathfrak{y} / d\theta)} d\mathfrak{y}/d\theta + d^2\mathfrak{y}/d\theta^2, \xi \right) \xi$$
$$+ \frac{(\mathfrak{z} \cdot d^2\mathfrak{y}/d\theta^2)}{(\mathfrak{z} \cdot d\mathfrak{y}/d\theta)} d\mathfrak{y}/d\theta - d^2\mathfrak{y}/d\theta^2 .$$

Aus (5) erfolgt

$$(6) \qquad (\mathfrak{y}\bar{\mathfrak{y}}) = -1 ,$$

wenn $\xi$ und $\mathfrak{y}$ aufeinander senkrecht sind.

Aus (6) können wir wissen, dasz zwei Kugeln $\mathfrak{y}$ und $\bar{\mathfrak{y}}$ einander berühren, wenn $\xi$ und $\mathfrak{y}$ aufeinander senkrecht sind.

(**C**) Setzen wir[1]

$$(1) \qquad \bar{\xi} - (\bar{\xi}\bar{\eta})\eta$$

und

(1) THOMSEN, G.: Über konforme Geo. II, Abh. ans dem Math. Seminar der Hamb. Univ. Bd. S. 122.

( 2 ) $\quad \xi - (\xi\eta)\eta$

anstatt $\mathfrak{y}$ bzw. $\mathfrak{z}$ in (A), so folgt

$$( 3 ) \quad \begin{aligned} \bar{\xi} - (\bar{\xi}\,\bar{\eta})\,\bar{\eta} &= 2(\xi - (\xi\eta)\eta, \acute{\xi})\,\overset{\frown}{\xi} - \{\xi - (\xi\eta)\eta\} \\ &= 2(\xi\,\overset{\frown}{\xi})\,\mathring{\xi} - (\xi\eta)(\mathring{\xi}\,\eta)\,\overset{\frown}{\xi} - \xi + (\xi\eta)\eta, \end{aligned}$$

wo wir $\overset{\frown}{\xi}$ anstatt $\xi$ in (A) nehmen.

Aus (3) erhalten wir

( 4 ) $\quad \bar{\xi} - \bar{\eta} = -\xi + \eta,$

wenn

( 5 ) $\quad \overset{\frown}{\xi} \perp \xi, \quad \xi \perp \eta$

gilt.

(**D**) Gelten

$$( 1 ) \quad \begin{cases} \lambda\,\mathfrak{z}_{uv} + \sigma\,\mathfrak{z}_u + \mathfrak{z}_v = \alpha, \\ \lambda\,\mathfrak{y}_{uv} + \sigma\,\mathfrak{y}_u + \mathfrak{y}_v = \beta \end{cases}$$

in (A), so erfolgt

( 2 ) $\quad \beta = 2(\alpha\xi)\,\xi - \alpha,$

wo $\xi$ eine feste Kugel und $\alpha$, $\beta$ die Kugeln in $R_N$ sind.

Wenn

( 3 ) $\quad \alpha \perp \xi$

so

( 4 ) $\quad \beta = -\alpha.$

(**E**) Aus (A) erhalten wir

$$( 1 ) \quad \begin{aligned} \{\lambda\mathfrak{y}_{uv} + \sigma\mathfrak{y}_u + \delta\mathfrak{y}_v + \mathfrak{y}\} &= 2(\lambda\mathfrak{z}_{uv} + \sigma\mathfrak{z}_u + \delta\mathfrak{z}_v + \mathfrak{z}, \xi)\,\xi \\ &\quad - \{\lambda\mathfrak{z}_{uv} + \sigma\mathfrak{z}_u + \delta\mathfrak{z}_v + \mathfrak{x}\}, \end{aligned}$$

wo $\xi$ eine feste Kugel und $\lambda, \sigma, \delta$ skalare Gröszen sind.

Wenn

( 2 ) $\quad \lambda\mathfrak{z}_{uv} + \sigma\mathfrak{z}_u + \delta\mathfrak{z}_v + \mathfrak{z} = 0,$

so

$$(3) \qquad \lambda \mathfrak{y}_{uv} + \sigma \mathfrak{y}_u + \delta \mathfrak{y}_v + \mathfrak{y} = 0\,,$$

d. h. durch Inversion unserer Beziehung ist

$$(4) \qquad \lambda \mathfrak{x}_{uv} + \sigma \mathfrak{x}_u + \delta \mathfrak{x}_v + \mathfrak{x} = 0$$

invariant.

(E) Es seien

$$(1) \qquad \begin{cases} \xi_1, & \xi_2, & \dots, & \xi_i, & \dots, & \xi_n; \\ \mathfrak{z}_1, & \mathfrak{z}_2, & \dots, & \mathfrak{z}_i, & \dots, & \xi_n; \\ \mathfrak{y}_1, & \mathfrak{y}_2, & \dots, & \mathfrak{y}_i, & \dots, & \xi_n \end{cases}$$

drei Paare von Kugeln in $R_N$ und gelten

$$(2) \qquad \begin{cases} \mathfrak{y}_i = 2(\mathfrak{z}_i \xi_i)\,\xi_i - \mathfrak{z}_i\,, \\ \xi_i = 2(\mathfrak{y}_i \mathfrak{z}_i)\,\mathfrak{z}_i - \mathfrak{y}_i\,, \\ \mathfrak{z}_i = 2(\xi_i \mathfrak{y}_i)\,\mathfrak{y}_i - \xi_i\,, \qquad [i = 1, 2, \dots, n]\,, \end{cases}$$

so erfolgt

$$(3) \qquad \{\xi_i + \mathfrak{y}_i + \mathfrak{z}_i\} = (\mathfrak{z}_i \xi_i)\,\xi_i + (\mathfrak{y}_i \mathfrak{z}_i)\,\mathfrak{z}_i + (\xi_i \mathfrak{y}_i)\,\mathfrak{y}_i$$

und

$$(4) \qquad \begin{cases} (\xi_i \mathfrak{y}_i) = -3(\mathfrak{y}_i \mathfrak{z}_i) + 4(\mathfrak{z}_i \xi_i)^2 (\mathfrak{y}_i \mathfrak{z}_i) - 4(\mathfrak{z}_i \xi_i)(\xi_i \mathfrak{y}_i)\,, \\ (\mathfrak{z}_i \xi_i) = -3(\xi_i \mathfrak{y}_i) + 4(\mathfrak{y}_i \mathfrak{z}_i)^2 (\xi_i \mathfrak{y}_i) - 4(\mathfrak{y}_i \mathfrak{z}_i)(\mathfrak{z}_i \xi_i)\,, \\ (\mathfrak{y}_i \mathfrak{z}_i) = -3(\mathfrak{z}_i \xi_i) + 4(\xi_i \mathfrak{y}_i)^2 (\mathfrak{z}_i \xi_i) - 4(\xi_i \mathfrak{y}_i)(\mathfrak{y}_i \mathfrak{z}_i)\,. \end{cases}$$

Aus (3) können wir wissen, dasz

$$(5) \qquad 1 + (\xi_i \mathfrak{y}_i) = (\mathfrak{y}_i \mathfrak{z}_i)(\xi_i \mathfrak{z}_i) + (\xi_i \mathfrak{y}_i)^2$$

oder

$$(6) \qquad 1 + \cos\phi_1 = \cos\phi_2 \cos\phi_3 + \cos^2\phi_1$$

gilt, wo $\phi_1$ der Winkel zwischen $\xi_i$ und $\mathfrak{y}_i$, $\phi_2$ der Winkel zwischen $\mathfrak{y}_i$ und $\mathfrak{z}_i$, $\phi_3$ der Winkel zwischen $\xi_i$ und $\mathfrak{z}_i$ ist.

## ( 4 )

Der Berührungspunkt ${}_{(i)}\mathfrak{x}$ ist durch

(A) $\qquad {}_{(i)}\mathfrak{x} = {}_{(i)}\xi - (\!({}_{(i)}\xi\,{}_{(i)}\eta)\!)\,{}_{(i)}\eta, \quad (\!({}_{(i)}\xi\,{}_{(i)}\eta)\!)^2 = 1, \quad [i=1,2,\ldots]$

gegeben, wo ${}_{(i)}\xi$, ${}_{(i)}\eta$ die Kreise in $R_2$ sind. Hier benutzen wir $(\!(\ )\!)$ anstatt ( ) in THOMSENs Arbeit.[1]

(**A**) Liegen ${}_{(i)}\mathfrak{x}$ $[i=1, 2, 3]$ auf einer Eilinie, so folgt

( 1 ) $\qquad \frac{1}{2}({}_{(2)}\mathfrak{x}-{}_{(1)}\mathfrak{x}\,,\ {}_{(3)}\mathfrak{x}-{}_{(1)}) \gtrsim 0$ oder immer $\leq 0$

wo ${}_{(i)}\mathfrak{x} = \mathfrak{x}({}_{(i)}t)$ ist.[2]

Aus (A), (1) folgt

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\big({}_{(2)}\xi - (\!({}_{(2)}\xi_{(2)}\eta)\!)\,{}_{(2)}\eta - {}_{(1)}\xi + (\!({}_{(1)}\xi_{(1)})\!)\,{}_{(1)}\eta\,, \\ \quad {}_{(3)}\xi - (\!({}_{(3)}\xi_{(3)}\eta)\!)\,{}_{(3)}\eta - {}_{(1)}\xi + (\!({}_{(1)}\xi_{(1)}\eta)\!)\,{}_{(1)}\eta\big) \gtrsim 0 \\ \qquad\qquad \text{oder immer} \lesssim 0\,. \end{cases}$$

(**B**) Es seien ${}_{(1)}\mathfrak{x}$ und ${}_{(2)}\mathfrak{x}$ zwei Randpunkte eines Eibereiches $\mathfrak{B}$ vom Flächeninhalt F und bedeute $|d_{(1)}\mathfrak{x}, d_{(2)}\mathfrak{x}|$ den Absolutwert der Determinante aus den beiden vektoriellen Randelementen von $\mathfrak{B}$ bei ${}_{(1)}\mathfrak{x}$ und ${}_{(2)}\mathfrak{x}$. Dann gelten für das Integral

( 1 ) $\qquad J = \iint |d_{(1)}\mathfrak{x}\,,\ d_{(2)}\mathfrak{x}|$

die Ungleichheiten[3]

( 2 ) $\qquad J \gtrsim 8F, \quad J \lesssim 12F.$

(**C**) Ist $\mathfrak{x}$ der Berührungspunkt von zwei Kreisen $\xi$ und $\eta$ in $R_N$, so können wir $\mathfrak{x}$ mit

( 1 ) $\qquad \mathfrak{x} = (\!(\xi\eta)\!)\,\eta - \xi\,, \quad (\!(\xi\eta)\!)^2 = 1$

bezeichnen, denn

( 2 ) $\qquad (\!(\mathfrak{x}\xi)\!) = 0\,, \quad (\!(\mathfrak{x}\eta)\!) = 0\,, \quad (\!(\mathfrak{x}\mathfrak{x})\!) = 0$

---

(1) THOMSEN, G.: Über konforme Geo. II. Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ. Bd., IV, S. 122.

(2) Vgl. BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeo. II, S. 42.

(3) BLASCHKE, a. a. O., S. 67.

gelten. Aus (1) und

$$(3) \qquad \bar{\mathfrak{x}} = \xi - (\xi\eta)\,\eta$$

folgt

$$(4) \qquad (\mathfrak{x}\,\bar{\mathfrak{x}}) = 0$$

so ist der Abstand zwischen $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ Null gleich.

(**D**) $\mathfrak{p}$ in

$$(1) \qquad k^2 = (\mathfrak{x}\mathfrak{p})^2 = (\xi\mathfrak{p}) - (\xi\eta)\,(\eta\mathfrak{p}),\ (\xi\eta)^2 = 1$$

bezeichnet einen Kreis, wo $\mathfrak{p}$ ein Punkt in $R_2$, $k$ konstant ist.

Aus (1) folgt

$$(2) \qquad k^2 = (\xi\mathfrak{p}) \pm (\eta\mathfrak{p}).$$

Alle Punkte von $\mathfrak{p}$ in (2) liegen auf einem Kreise in $R_2$,

(**E**) Ist $\mathfrak{x}$ der Berührungspunkt von zwei Kreisen $\xi$ und $\eta$, so folgen

$$(1) \qquad \mathfrak{x} = \xi - (\xi\eta)\,\eta,\ (\xi\eta)^2 = 1.$$

Ist $\mathfrak{x}$ der Berührungspunkt von zwei Kreisen $\bar{\xi}$ und $\bar{\eta}$, so folgen

$$(2) \qquad \mathfrak{x} = \bar{\xi} - (\bar{\xi}\,\bar{\eta})\,\bar{\eta},\ (\bar{\xi}\,\bar{\eta})^2 = 1.$$

Aus (1), (2) folgt

$$(3) \qquad \xi - (\xi\eta)\,\eta = \bar{\xi} - (\bar{\xi}\,\bar{\eta})\,\bar{\eta},$$

wo

$$(\xi\eta)^2 = 1,\quad (\bar{\xi}\,\bar{\eta})^2 = 1$$

sind.

(3) ist unsere Bedingung.

Wenn sich $\xi$, $\eta$ bzw. $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ auszen berühren, so folgt aus (3)

$$(4) \qquad \xi - \bar{\xi} = \eta - \bar{\eta}.$$

(**F**) Wenn zwei Punkte $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ in

$$(1) \qquad \mathfrak{x} = \xi - (\xi\eta)\,\eta,\ (\xi\eta)^2 = 1$$

und

$$(2)\qquad \bar{\mathfrak{x}} = \bar{\xi} - (\!(\bar{\xi}\,\bar{\eta})\!)\,\bar{\eta}\,,\quad (\!(\bar{\xi}\,\bar{\eta})\!)^2 = 1$$

zusummedfallen, so folgt aus (1) und (2)

$$(3)\qquad (\!(\xi\bar{\xi})\!) + (\!(\xi\eta)\!)\,(\!(\bar{\xi}\,\bar{\eta})\!)\,(\!(\eta\bar{\eta})\!) = (\!(\bar{\xi}\,\bar{\eta})\!)\,(\!(\xi\bar{\eta})\!) + (\!(\xi\eta)\!)\,(\!(\bar{\xi}\eta)\!)$$

oder

$$(4)\qquad (\!(\xi - \eta, \bar{\xi})\!) = (\!(\xi - \eta, \bar{\eta})\!)$$

d. h.

$$(5)\qquad \cos\varphi = \cos\psi\,,$$

wenn $\xi$, $\eta$ bzw. $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ auszen einander berühren, wo $\varphi$ der Winkel zwischen $\xi-\eta$ und $\bar{\xi}$, $\psi$ der Winkel zwischen $\xi-\eta$ und $\bar{\eta}$ ist.

Aus (5) folgt der

**Satz:** *Berühren sich die Kreise $\xi$, $\eta$ bzw. $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ in* $R_2$ *auszen, so besteht*

$$\cos\varphi = \cos\psi\,,$$

*wo $\varphi$ der Winkel zwischen $\xi-\eta$ und $\bar{\xi}$, $\psi$ der Winkel zwischen $\xi-\eta$ und $\bar{\eta}$ ist, da die beiden Berührungspunkte von $\mathfrak{x}$ bzw. $\bar{\mathfrak{x}}$ zusammenfallen.*

(G) Wir betrachten $\xi$ und $\mathfrak{x}$ in (A) als Funktionen eines Parameters $t$, so folgt

$$(1)\qquad \mathfrak{x}(t) = \xi(t) - (\!(\xi(t)\,\eta)\!)\,\eta\,,$$

woraus sich ergibt

$$(2)\qquad d\mathfrak{x}/dt = d\xi/dt - (\!(d\xi/dt\cdot\eta)\!)\,\eta\,,$$

wo $\eta$ ein fester Kreis in $R_2$ ist.

Die Gleichung

$$(3)\qquad (\dot{\mathfrak{x}}\,\ddot{\mathfrak{x}}\,\dddot{\mathfrak{x}}) \equiv 0$$

oder

$$(4)\qquad [\dot{\xi} - (\!(\dot{\xi}\eta)\!)\,\eta\,,\ \ddot{\xi} - (\!(\ddot{\xi}\eta)\!)\,\eta\,,\ \dddot{\xi} - (\!(\dddot{\xi}\,\eta)\!)\,\eta] \equiv 0$$

ist charakteristisch für die ebenen Kurven, wo $(\dot{\mathfrak{x}}\,\ddot{\mathfrak{x}}\,\dddot{\mathfrak{x}})$ eine sogenannte WRONSKIsche Determinante ist.

Betrachten wir $t$ in (1) als die Zeit, so bezeichnet (2) die Geschwindigkeit.

(**H**) Im folgenden möchten wir $\mathfrak{x}$ in (A) in verschiedenen Fällen finden.

Setzen wir

$$\eta + \dot{\eta}\, dt, \quad \dot{\eta} = d\eta/dt$$

anstatt $\eta$ in (A), so folgt

$$\mathfrak{x} = \xi - (\!(\xi, \eta + \dot{\eta}\, dt)\!) \{\eta + \dot{\eta}\, dt\},$$

wo $t$ ein Parameter ist.

Setzen wir

$$\eta + \dot{\eta}\, dt$$

anstatt $\xi$ in (A), so folgt

$$\begin{cases} \mathfrak{x} = \{\eta + \dot{\eta}\, dt\} - (\eta + \dot{\eta}\, dt, \eta)\, \eta \\ \quad = \{\eta + \dot{\eta}\, dt\} - \eta \\ \quad = \dot{\eta}\, dt. \end{cases}$$

Ist $\xi$ ein fester Kreis in $R_2$ und nehmen wir $n$ Punkte

$${}_{(i)}\mathfrak{x} \qquad [i = 1, 2, \dots n]$$

auf $\xi$, so können wir setzen

$${}_{(i)}\mathfrak{x} = \xi - (\!(\xi\, {}_{(i)}\eta)\!)\, {}_{(i)}\eta \qquad [i = 1, 2, \dots n].$$

Betrachten wir $\mathfrak{x}$ als Funktion eines Parameters $s$ und gilt

$$\dddot{\mathfrak{x}} = 0$$

oder

$$d^3/ds^3 \cdot \{(\!(\xi\eta(s))\!)\, \eta(s)\} = 0,$$

so bezeichnet $\mathfrak{x}(s)$ oder $\xi$ eine Gerade, wo $s$ den Kurvenbogen von $\xi$ bedeutet.

(**I**) Setzen wir

(1) $\quad \mathfrak{a} + i\dot{\mathfrak{B}}, \quad i = \sqrt{-1}$

anstatt $\xi$ in (A), so folgt

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = \mathfrak{a} + i\mathfrak{B} - (\mathfrak{a} + i\mathfrak{B}, \eta)\eta \\ \quad = \{\mathfrak{a} - (\mathfrak{a}\eta)\eta\} + i\{\mathfrak{B} - (\mathfrak{B}\eta)\eta\}, \end{cases}$$

oder

$$(3)\qquad \mathfrak{x} = \mathfrak{a} - (\mathfrak{a}\eta)\eta, \quad \mathfrak{B} = (\mathfrak{B}\eta)\eta,$$

wo $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{B}$, $\eta$, $\mathfrak{x}$ reelle Kreise in $R_2$ sind.

Setzen wir

$$(4)\qquad \mathfrak{a} + i\mathfrak{B}$$

anstatt $\eta$ in (A), so folgt

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = \xi - (\xi, \mathfrak{a} + i\mathfrak{B})\{\mathfrak{a} + i\mathfrak{B}\} \\ \quad = \xi + (\xi\mathfrak{B})\mathfrak{B} - i[(\xi\mathfrak{B})\mathfrak{a} + (\xi\mathfrak{a})\mathfrak{B}], \end{cases}$$

daraus ergibt sich

$$(6.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = \xi + (\xi\mathfrak{B})\mathfrak{B} - (\xi\mathfrak{a})\mathfrak{a}, \\ \mathfrak{a}(\xi\mathfrak{B}) + \mathfrak{B}(\xi\mathfrak{a}) = 0, \end{cases}$$

wo $\xi$ ein reeller Kreis ist.

## ( 5 )

Im folgenden möchten wir über die Kugeln und Kreise einige Bemerkung machen.

(**A**) Im folgenden teilen wir die Gerandengeometrie mit.

$$(1)\qquad \xi^{\alpha} \qquad [\alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}]$$

bezeichnet eine Gerade $g$, die mit zwei Punkten $\xi^{\mathrm{I}}$ und $\xi^{\mathrm{II}}$ bestimmt wird.

Gleichfalls bezeichnet

$$(2)\qquad \bar{\xi}^{\alpha} \qquad [\alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}]$$

eine Gerade $\bar{g}$, die sich mit zwei Punkten $\bar{\xi}^{\mathrm{I}}$ und $\bar{\xi}^{\mathrm{II}}$ bestimmen läszt

$$(3) \qquad \zeta^\alpha = p\xi^\alpha + q\bar{\xi}^\alpha \qquad [\alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}]$$

bezeichnet eine Gerade G, die durch den Schnittpunkt von $g$ und $\bar{g}$ geht, wo $p$, $q$ skalare Gröszen sind.

Mit anderen Worten können wir sagen, dasz alle Geraden $\zeta^\alpha$, die sich aus den $\bar{\xi}^\alpha$, $\xi^\alpha$ kombinieren lassen, durch dieselben Schnittpunkte gehen:

$$(4) \qquad \{\xi^\alpha, \bar{\xi}^\alpha\}.$$

$$(5) \qquad \lambda_1\xi^{\mathrm{I}} + \lambda_2\xi^{\mathrm{II}} + \lambda_3\bar{\xi}^{\mathrm{I}} + \lambda_4\bar{\xi}^{\mathrm{II}} = 0$$

ist die Bedingung dafür, dasz zwei Geraden

$$(6) \qquad \{\xi^{\mathrm{I}}, \bar{\xi}^{\mathrm{I}}\}, \quad \{\xi^{\mathrm{II}}, \bar{\xi}^{\mathrm{II}}\}$$

auf eidem Geradenbüschel liegen, oder (5) die Bedingung dafür ist, dasz zwe Geradepaare

$$(7) \qquad \{\xi^{\mathrm{I}}, \xi^{\mathrm{II}}\}, \quad \{\bar{\xi}^{\mathrm{I}}, \bar{\xi}^{\mathrm{II}}\}$$

auf demselben Geradenbüschel liegen, wobei

$$(8) \qquad \lambda_i \qquad [i = 1, 2, 3, 4]$$

irgendwelche skalaren Zahlen sind.

Also folgt der

**Satz:** *Wenn die Geradepaare*

$$\{\xi^{\mathrm{I}}, \bar{\xi}^{\mathrm{I}}\}, \quad \{\xi^{\mathrm{II}}, \bar{\xi}^{\mathrm{II}}\}$$

*auf einem Geradenbüschel liegen, dann liegen die Geradepaare*

$$\{\xi^{\mathrm{I}}, \xi^{\mathrm{II}}\}, \quad \{\bar{\xi}^{\mathrm{I}}, \bar{\xi}^{\mathrm{II}}\}$$

*auch auf demselben Geradenbüschel.*

(**B**) Ein Soma wird definiert durch acht homogene Koordinanten[1]

$$\mathfrak{X}_0 : \mathfrak{X}_{01} : \mathfrak{X}_{02} : \mathfrak{X}_{03} : \mathfrak{X}_{123} : \mathfrak{X}_{23} : \mathfrak{X}_{31} : \mathfrak{X}_{12},$$

die der quadratischen Relation genügen:

$$(1) \qquad \tfrac{1}{2}(\mathfrak{X}\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}_0\mathfrak{X}_{123} + \mathfrak{X}_{01}\mathfrak{X}_{23} + \mathfrak{X}_{02}\mathfrak{X}_{31} + \mathfrak{X}_{03}\mathfrak{X}_{12} = 0.$$

(1) Vgl. STUDY: Geometrie der Dynamen, S. 556.

Die beiden Somen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{y}$ sind zueinander parallel für

$$(2) \qquad \mathfrak{X}_0 : \mathfrak{X}_{01} : \mathfrak{X}_{02} : \mathfrak{X}_{03} = \mathfrak{y}_0 : \mathfrak{y}_{01} : \mathfrak{y}_{02} : \mathfrak{y}_{03} .$$

Können die beiden Somen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{y}$ aus den andern durch eine Drehung gewonnen werden, so sagen wir, die beiden Somen schneiden sich.

Die notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung dafür, dasz

$$(3) \qquad (\mathfrak{X}\mathfrak{y}) = 0 ,$$

wieder duzu dient, den Begriff auf uneigentliche Somen zu erstrecken.

Aus den Somen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{y}$ bilden wir den Somenbüschel

$$\mathfrak{z}_1 = \sigma_1 \mathfrak{X} + \sigma_2 \mathfrak{y} ,$$

wobei $\sigma_1$, $\sigma_2$ irgendwelche skalaren Zahlen sind.

Sei nämlich

$$\mathfrak{z}_2 = \tau_1 \mathfrak{X} + \tau_2 \mathfrak{y} ,$$

ein anderes Soma des Büschels ($\sigma_1\tau_2 - \sigma_2\tau_1 \neq 0$), so ist

$$(4) \qquad (\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2) = \sigma_1\tau_1(\mathfrak{X}\mathfrak{X}) + (\sigma_1\tau_2 + \sigma_2\tau_1)(\mathfrak{X}\mathfrak{y}) + \sigma_2\tau_2(\mathfrak{y}\mathfrak{y}) = 0 .$$

Aus (1), (3), (4) folgt dasz, wenn $(\mathfrak{X}\mathfrak{y}) = 0$, dann $(\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2) = 0$.

Weiter können wir untersuchen wie in meiner Arbeit.(2)

(C) Wir bilden aus den Koeffizienten des Linienelements $ds^2$ einen Tensor $W_{r,s,p;h,k,q}$, der mit den Eigenschaften ausgestattet ist, die denen des Tensors $W_{r,s;p,q}$ analog sind, mit Hilfe von $W_{r,s,p;h,k,q}$ und dem dazu *„reziproken Tensor“* $W^{r,s,p;h,k,q}$. Und die vier Tensoren entwickeln ein Verfahren, zu jedem Tensor mit drei kovarianten (oder kontravarianten) Indices erster Klasse $x_{r,s,p}$ (oder $y^{r,s,p}$) den *„Pseudoreziproken“* $x^{r,s,p}$ (oder $y_{r,s,p}$) zu konstruieren; sie bezeichnet den Ausdruck

$$(1) \qquad (x, y) = \sum_{r,s,p} x_{r,s,p} \, y^{r,s,p}$$

als Alternante der beiden Tensoren $x_{r,s,p}$ und $y_{r,s,p}$.

(2) NAKAZIMA, S.: Kugelgeo. von MÖBIUS, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. 2, S. 6.

Wir betrachten als *Hauptsystem von Normalen* in $\pi_3$ ein System von $\nu$ Einheitsvektoren

$$\underset{i}{X}, \quad i = 1, 2, \ldots, \nu \; (\nu = \text{Dimension von } \pi_3)$$

von folgender Beschaffenheit: Versteht man unter $\underset{i}{x}_{r,s,p}$ die skalaren Produkte der $\underset{i}{X}$ mit den Vektoren $f_{r,s,p}$, den Komponenten des „*terzo ricciano*" des variablen Punktes $f$ von $V_n$, so soll gelten: [1]

$$(2) \qquad (\underset{i}{x}, \underset{j}{x}) = 0 \quad \text{für} \quad 1, 2, \ldots \nu \quad \text{und} \quad i \neq j;$$

Aus (1) und (2) kann man weiter untersuchen wie in unseren kugelgeometrischen Untersuchungan.

(D) Geben wir auf einer Kugel $\mathfrak{z}$ in $R_3$ drei Kugeln

$$\mathfrak{x}^\alpha \quad [\alpha = \text{I, II, III}]$$

in $R_3$ und auf einer weiteren Kugel $\overset{*}{\mathfrak{z}}$ in $R_3$ ebenfalls drei Kugeln $\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^\alpha$ in $R_3$ vor, so gilt es genau vier MÖBIUStransformationen des $R_3$ -Raumes, die Figur $\{\mathfrak{z}\mathfrak{x}^\alpha\}$ überführen in die Figur $\{\overset{*}{\mathfrak{z}}\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^\alpha\}$.

Wir können zunächst durch eine Ähnlichkeit $\mathfrak{z}$ in $\overset{*}{\mathfrak{z}}$ überführen, dann gehen dabei die $\mathfrak{x}^\alpha$ in drei Kugeln $\bar{\mathfrak{x}}^\alpha$ auf $\overset{*}{\mathfrak{z}}$ über.

Also können wir dann auf zwei verschiedene Weisen durch eine Kreisverwandtschaft auf $\overset{*}{\mathfrak{z}}$ die $\bar{\mathfrak{x}}^\alpha$ in die $\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^\alpha$ überführen.

Zu jeder solchen Kreisverwandtschaft haben wir dann nach dem eben Ausgeführten noch zwei zugehörige Transformationen des $R_3$ -Raumes.

Diese vier Abbildungen sind nun auch die einzig möglichen. Denn die Figur $\{\overset{*}{\mathfrak{z}}\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^\alpha\}$ kann, wenn man die Identität mitrechnet, nur durch vier Transformationen in sich übergeführt werden.

Zunächst gibt es zu der Identität auf der Kugel $\overset{*}{\mathfrak{z}}$ mit zwei Kreisverwandtschaften einmal die Identität des $R_3$ -Raumes und dann die Inversion an $\overset{*}{\mathfrak{z}}$, die alle Punkte von $\overset{*}{\mathfrak{z}}$ in Ruhe lässt.

Dann gibt es die Inversion auf $\overset{*}{\mathfrak{z}}$, die den Kreis durch die Kreise $\{\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^\alpha\mathfrak{z}\}$ auf $\mathfrak{z}$ punktweise in Ruhe lässt, und zu dieser gibt es zwei Trans-

(1) Vgl. BALDONI, R.: Sistemi di normali principali ad una varieta nel suo $\pi_3$, I, II, Atti della Reale Accademla Nazionale dei Lincei. Rendiconti, Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Roma, G. Bardi. Serie 6, Bd. II; S. 149 und S. 261.

formationen im $R_3$ -Raum, von denen man wieder die eine aus der andern erhält, indem man noch die Inversion an $\overset{*}{\mathfrak{z}}$ ausführt.

Da die Figur $\{\overset{*}{\mathfrak{z}}\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{a}\}$ von 10 Bestimmungsstücken abhängt, ist unsere Gruppe der Abbildungen von Möbius im $R_3$ -Raum 10 = gliedrig, (Gruppe $M_{10}$).

**(E)** Es seien $S_1=0$, $S_2=0$, $S_3=0$ die Gleichungen dreier Kugeln mit den Radien $R_1$, $R_2$, $R_3$.

Ferner seien

$$\begin{cases} t_1 = (x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(z_2-z_3)^2-(R_2-R_3)^2 = f(2,5), \\ t_2 = f(3,1), \quad t_3 = f(1,2); \end{cases}$$

dann ist die Gleichung der Cyklide, wenn man sie als Enveloppe einer Kugel betrachtet, welche die drei gegebenen Kugeln berührt:[1]

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} 0 & S_1 & S_2 & S_3 \\ S_1 & 0 & t_3 & t_2 \\ S_2 & t_3 & 0 & t_1 \\ S_3 & t_2 & t_1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Wenn

$$t_i = \text{const.},$$

so folgt aus (1)

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} 0 & S_1 & S_2 & S_3 \\ S_1 & 0 & C_3 & C_2 \\ S_2 & C_3 & 0 & C_1 \\ S_3 & C_2 & C_1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

wo $C_i$ die Konstanten sind.

Ist

$$t_1 = t_3 = t_2 (= t),$$

(1) NEUBERG, J.: Sur la cyclide de DUPIN, Mémories de la Société Royale des sciences de Liège (2) X.

so folgt

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} 0 & S_1 & S_2 & S_3 \\ S_1 & 0 & t & t \\ S_2 & t & 0 & t \\ S_3 & t & t & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

d. h.

$$(4)\qquad S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - 2\,S_1S_3 - 2\,S_1S_2 - 2\,S_2S_3 = 0 .$$

(4) ist die *Fläche vierter Ordnung.*

Wenn $S_2 \equiv S_3$, so folgt $t_1 \equiv 0$, $t_3 = -\,t_2$, daraus ergibt sich aus (1)

$$(5)\qquad S_2 = 0 \quad \text{oder} \quad t_2 = 0 .$$

(5) *ist unsere Fläche.*

(F)

$$(1)\qquad \mathfrak{x}^{\alpha} \quad [\alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \ldots, 2\,n+1]$$

bezeichnet $2\,n$ Punkte auf einer Kugel.

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x}^{\alpha} & [\alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \ldots, 2\,n+1], \\ \bar{\mathfrak{x}}^{\lambda} & [\lambda = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \ldots, 2\,n+1] \end{cases}$$

bezeichnen zwei Kugeln, auf deren jeder $2\,n$ Punkte liegen.

Für (1) und (2) können wir untersuchen wie in meiner Arbeit,[1] z. B. wenn

$$(3)\qquad \|\, \mathfrak{x}^{\mathrm{I}}, \mathfrak{x}^{\mathrm{II}}, \ldots, \mathfrak{x}^{(2n+1)}, \bar{\mathfrak{x}}^{\mathrm{I}}, \bar{\mathfrak{x}}^{\mathrm{II}}, \ldots, \bar{\mathfrak{x}}^{(2n+1)} \,\| \equiv 0$$

gilt, so folgt

$$(4)\qquad \sigma_{\alpha}\mathfrak{x}^{\alpha} = \bar{\sigma}_{\lambda}\bar{\mathfrak{x}}^{\lambda} .$$

Die Bedeutung von (4) ist die, dasz es eine Kugel gibt, auf der $2\,u$ Punkte liegen.

(G) Bezeichnen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Radien, $a$, $b$, $c$ die Mittelpunkts-

(1) NAKAZIMA, S.: Differentialgeo. der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ. (34), 1931, S. 187.

abstände der drei Kreise, so ist der Radius des Kreises, der drei gegebene Kreise berührt:

$$(1)\qquad \rho = -\frac{A\alpha(S-A) + B\beta(S-B) + C\gamma(S-C) \mp 4J\sqrt{A\cdot B\cdot C}}{A(S-A) + B(S-B) + C(S-C)}$$

worin zur Abkürzung

$$(2)\qquad \begin{cases} A = a^2 - (\beta-\gamma)^2; & B = b^2 - (\gamma-\alpha)^2; \\ C = C^2 - (\alpha-\beta)^2; & S = \frac{1}{2}(A+B+C) \end{cases}$$

gesetzt sind und J den Inhalt des aus den drei Kreismittelpunkten gebildeten Dreiecks bedeutet.[1]

Aus (1) ergibt sich

$$(3)\qquad \rho = \alpha(4/\sqrt{3} - 1),$$

wenn

$$(4)\qquad \alpha = \beta = \gamma, \quad a = b = c = 2\alpha$$

gilt.

Aus (3) können wir wissen, dasz

$$(5)\qquad \rho : \alpha = 4/\sqrt{3} - 1$$

gilt.

Setzen wir jetzt (1) in der Form

$$(6)\qquad \begin{cases} \rho_1 = -\dfrac{A\alpha(S-A) + B\beta(S-B) + C\gamma(S-C) + 4J\sqrt{A\cdot B\cdot C}}{A(S-A) + B(S-B) + C(S-C)}, \\[2ex] \rho_2 = -\dfrac{A\alpha(S-A) + B\beta(S-B) + C\gamma(S-C) - 4J\sqrt{A\cdot B\cdot C}}{A(S-A) + B(S-B) + C(S-C)}, \end{cases}$$

so folgt

$$(7)\qquad \begin{aligned} -\{\rho_1+\rho_2\} : 2 = \{&A\alpha(S-A) + B\beta(S-B) + C\gamma(S-\gamma)\} \\ &: \{A(S-A) + B(S-B) + C(S-\gamma)\} = \alpha, \end{aligned}$$

(1) MATTHES, C, J.: Radius des Kreises, der drei gegebene Kreise berührt, Archiv für Mathematik und Physik mit besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse der Lehrer an den höheren Unterrichtsanstalten gegründet von J. A. Grunert, fortgesetzt von R. HOPPE, Greifswald, LX, S. 445.

wenn

$$(8) \qquad \alpha = \beta = \gamma$$

gilt.

(H) Es seien $P_k(x_k, y_k, z_k)$ der Punkte auf einer Kugel $\mathfrak{K}$, deren Radius $r$ gleich ist und deren Zentrium auf dem Ursprungspunkt von Koordinanten, so kommt zustande[1] aus Quaternion

$$(1) \qquad P_k = x_k i + y_k j + z_k k,$$

wo

$$(2) \qquad x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 = r^2.$$

Schreiben wir den Tetraheder $P_1P_2P_3P_4$ innen $\mathfrak{K}$ um, so bezeichnen

$$(3) \qquad \frac{P_1+P_2+P_3}{3}, \quad \frac{P_2+P_3+P_4}{3}, \quad \frac{P_2+P_4+P_1}{3}, \quad \frac{P_4+P_1+P_2}{3}$$

den Schwerpunkt von

$$(4) \qquad \triangle P_1P_2P_5, \quad \triangle P_2P_3P_4, \quad \triangle P_3P_4P_1 \text{ bzw. } \triangle P_4P_1P_2.$$

Liegt der Punkt P in

$$(5) \qquad \bar{P} = \tfrac{1}{3}[(P_1 + P_2 + P_3 + P_4) - P]$$

auf $\mathfrak{K}$, so liegt $\bar{P}$ in (5) auf einer Kugel, die den Punkt (3) hindurch geht.

Also ist (5) die Gleichung der Kugel, die den Punkt (3) hindurch geht.

Wir wollen es $\mathfrak{K}_{1234}$ bezeichnen.

Weiter nehmen wir einen Punkt $P_5$ auf $\mathfrak{K}$, so erhalten wir die Kugeln

$$(6) \qquad \mathfrak{K}_{1234}, \ \mathfrak{K}_{2345}, \ \mathfrak{K}_{3451}, \ \mathfrak{K}_{4512}, \ \mathfrak{K}_{5123}$$

aus Tetrahedern

$$(7) \qquad P_1P_2P_3P_3, \ P_2P_3P_4P_5, \ P_3P_4P_5P_1, \ P_4P_5P_1P_2, \ P_5P_1P_2P_3.$$

(1) Vgl. z. B. TAIT and KNOT: Introduction to Quaternions, Edinburgh, (1903).

(6) gehen ein und denselben Punkt hindurch, weil die Kugeln

$$(8)\quad \begin{cases} \frac{1}{3}[(P_1+P_2+P_3+P_4)-P], \\ \frac{1}{3}[(P_2+P_3+P_4+P_5)-P], \\ \frac{1}{3}[(P_3+P_4+P_5+P_1)-P], \\ \frac{1}{3}[(P_4+P_5+P_1+P_2)-P], \\ \frac{1}{3}[(P_5+P_1+P_2+P_3)-P] \end{cases}$$

den Punkt

$$(9)\qquad P_{12345}\equiv\tfrac{1}{3}(P_1+P_2+P_3+P_4+P_5)$$

hindurch gehen.

Sind $E_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ feste Punkte, oder ist $P_5$ veränderlich, der über die Kurve C auf $\mathfrak{K}$ läuft, so läuft der Punkt $P_{12345}$ üder die Kurve C′ auf der Kugel $\mathfrak{K}_{1234}$.

Ist C geschlossen, so ist C′ auch geschlossen.

Die Punkte

$$(10)\quad \begin{cases} \frac{1}{3}(P_1+P_2+P_3+P_4), \\ \frac{1}{3}(P_2+P_3+P_4+P_5), \\ \frac{1}{3}(P_3+P_4+P_5+P_1), \\ \frac{1}{3}(P_4+P_5+P_1+P_2), \\ \frac{1}{3}(P_5+P_1+P_2+P_3) \end{cases}$$

liegen auf der Kugel

$$\bar{\mathfrak{K}}_{12345},$$

oder

$$(11)\qquad \bar{P}=\tfrac{1}{3}[(P_1+P_2+P_3+P_4+P_5)-P].$$

Nehmen wir weiter einen Punkt $P_6$ auf $\mathfrak{K}$, so erhalten wir die Punkte

$$(12)\qquad P_{12345},\ P_{23456},\ P_{34561},\ P_{45612},\ P_{56123},\ P_{61234},$$

woraus wir die Punkte haben:

$$(13)\quad \begin{cases} \frac{1}{3}(P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5)\,, \\ \frac{1}{3}(P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6)\,, \\ \frac{1}{3}(P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_1)\,, \\ \frac{1}{3}(P_4 + P_5 + P_6 + P_1 + P_2)\,, \\ \frac{1}{3}(P_5 + P_6 + P_1 + P_2 + P_3)\,, \end{cases}$$

die auf einer Kugel liegen

$$(14)\qquad \tfrac{1}{3}\left[(P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6) - P\right].$$

So gehen die Kugeln

$$(15)\qquad \bar{\mathfrak{K}}_{12345}\,,\ \bar{\mathfrak{K}}_{23456}\,,\ \bar{\mathfrak{K}}_{34561}\,,\ \bar{\mathfrak{K}}_{45612}\,,\ \bar{\mathfrak{K}}_{56123}$$

durch ein und denselben Punkt

$$(16)\qquad \tfrac{1}{3}(P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6)\,,$$

u. s. w..

Weiter können wir diesen Satz im $R_n$ -Raume erweitern.

(I) Betrachten wir

$$(1)\qquad \cos^2\varphi = T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta\,,\quad A^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta = 1$$

in meiner Arbeit[1], so können wir wissen, dasz

$$(2)\quad \begin{cases} \cos^2\varphi = \{T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta\}\cdot\{A^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta\}^{n}\,, \\ \cos^2\varphi = \{T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta\}\cdot\{A^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta\}^{-m}\,, \\ \sin^2\varphi = [\{A^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}\}\,\rho_\alpha\rho_\beta]\cdot\{A^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta\}^{n}\,, \\ \sin^2\varphi = [\{A^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}\}\,\rho_\alpha\rho_\beta]\cdot\{A^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta\}^{-m}\,, \\ \cos^{2p}\varphi = \{T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\alpha\}^{p}\cdot\{A^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta\}^{n}\,, \\ \cos^{2p}\varphi = \{T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta\}^{p}\cdot\{A^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta\}^{-m}\,, \\ \sin^{2p}\varphi = \{T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta\}^{p}\cdot\{A^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta\}^{n}\,, \\ \sin^{2p}\varphi = \{T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta\}^{p}\cdot\{A^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta\}^{-m} \end{cases}$$

gelten, wo $m$, $n$ und $p$ beliebige reelle Zahlen sind.

---

(1) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geo. der Kreise und Kugeln (1), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. V, (1932), S. 83.

( **6** )

Im folgenden möchten wir

(A) $\eta = \cos\alpha \cdot \xi + \sin\alpha \cdot \xi'$

betrachten.

(**A**) Wir untersuchen

( 1 ) $\eta = \cos\alpha \cdot \xi + \sin\alpha \cdot \xi' + \zeta$,

so folgt

( 2 ) $(\xi\eta) = \cos\alpha$, $(\xi\eta) = \sin\alpha$;

wenn

( 3 ) $(\xi\zeta) = 0$, $(\xi'\zeta) = 0$

gilt, so können wir (1) anstatt (A) betrachten, wo $\xi$. $\xi'$, $\eta$ und $\zeta$ die Kreise in $R_2$, $\zeta$ der imaginäre Kreis, der (3) erfüllt[1].

Nun können wir setzen

( 4 ) $i\chi$, $i = \sqrt{-1}$

anstatt $\zeta$ in (1), dann erhalten wir

( 5 ) $\eta = \cos\alpha \cdot \xi + \sin\alpha \cdot \xi' + i\chi$,

wo $\chi$ der Kreis in $R_2$ ist.

(**B**) Wir betrachten

( 1 ) $\zeta = \cos\alpha \cdot \xi + \sin\alpha \cdot \eta$, $(\xi\eta) = 0$,

wo $\xi$, $\eta$ und $\zeta$ die Kugeln in $R_N$ sind.

Wenn $\zeta$ eine feste Kugel ist, so entsteht

( 2 ) $\cos\alpha \cdot d\xi + \sin\alpha \cdot d\eta + (-\sin\alpha \cdot \xi + \cos\alpha \cdot \eta)\, d\alpha = 0$.

Wenn der Winkel zwischen $\xi$ und $\eta\beta$ gleich ist, so entsteht

( 3 ) $\zeta = \cos\alpha \cdot \xi + \cos(\beta - \alpha) \cdot \eta$.

(1) THOMSEN, G.: Über konforme Geo. II, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ. IV Bd, S. 132.

Wenn $\beta = \frac{\pi}{2}$ in (3) ist, so folgt (1).

Im allgemeinen können wir setzen

$$(4) \qquad \zeta = \cos\alpha \cdot \xi + \cos(\beta - \alpha)\eta + i\mathfrak{x},$$

wo $i = \sqrt{-1}$, $\beta$ konstant und $\mathfrak{x}$ die Kugel in $R_N$ ist.

(**C**) Wir untersuchen

$$(1) \qquad \zeta = \cos\alpha \cdot \xi + \sin\alpha \cdot \eta$$

wo $\xi, \eta$ und $\zeta$ die Kugeln in $R_N$ sind, da $\xi \perp \eta$ ist.

Aus (1) folgen

$$(2) \qquad \begin{cases} d\zeta/d\alpha = -\sin\alpha \cdot \xi + \cos\alpha \cdot \eta, \\ d^2\zeta/d\alpha^2 + \zeta = -\sin\alpha \cdot d\xi/d\alpha + \cos\alpha \cdot d\eta/d\alpha, \end{cases}$$

wo

$$(3) \qquad \cos\alpha \cdot d\xi/d\alpha + \sin\alpha \cdot d\eta/d\alpha = 0$$

ist.

Wenn

$$(4) \qquad \begin{cases} \cos\alpha \cdot d\xi/d\alpha + \sin\alpha \cdot d\eta/d\alpha = 0, \\ -\sin\alpha \cdot d\xi/d\alpha + \cos\alpha \cdot d\eta/d\alpha = 0 \end{cases}$$

oder

$$(5) \qquad d\xi/d\alpha = 0, \quad d\eta/d\alpha = 0,$$

d. h. $\qquad \xi = \eta = \text{const.}$

gilt, so folgt

$$(6) \qquad d^2\zeta/d\alpha^2 + \zeta = 0.$$

Wenn $\alpha =$ constant, $\xi$ und $\eta$ veränderlich sind, so folgt

$$(7) \qquad d\zeta = \cos\alpha \cdot d\xi + \sin\alpha \cdot d\eta.$$

Aus (1), (2) haben wir

$$(8) \qquad \zeta + d\zeta = \cos\alpha\,\{\xi + d\xi\} + \sin\alpha\,\{\eta + d\eta\}$$

daraus ergibt sich

$$(9) \qquad (\zeta + d\zeta, \xi + d\xi) = \cos\alpha.$$

Da wissen wir, dasz der Winkel zwischen $\zeta + d\zeta$ und $\xi + d\xi$ $\alpha$ gleich ist.

Wenn $\xi$ und $\eta$ konstant, $\alpha$ veränderlich ist, so folgt

$$(10) \qquad d\zeta = -\sin\alpha \cdot \xi \cdot d\alpha + \cos\alpha \cdot \eta \cdot d\alpha ,$$

daraus ergibt sich aus (1) und (10)

$$(11) \qquad \zeta + d\zeta = \cos\alpha \{\xi + d\alpha \cdot \eta\} + \sin\alpha \{\eta - d\alpha \cdot \xi\},$$

so haben wir zur Folge

$$(12) \qquad (\zeta + d\zeta, \xi + d\alpha \cdot \eta) = \cos\alpha ,$$

d. h. der Winkel zwischen $\zeta + d\zeta$ und $\xi + d\alpha \cdot \eta$ ist $\alpha$ gleich.

(**D**) Im folgenden möchten wir die Ebenengeometrie erwähnen.

Ist $\mathfrak{x}$ der Berührungspunkt zweier Kreise $\xi$ und $\eta$, so folgt

$$(1) \qquad \mathfrak{x} = \xi - (\xi\eta)\eta .$$

Ist $\zeta$ der Kreis, der durch den Punkt $\mathfrak{x}$ geht, so folgt

$$(2) \qquad (\xi\zeta) = (\xi\eta)(\eta\zeta) .$$

Liegt der Punkt $\mathfrak{v}$ auf dem Kreis $\zeta$, so entsteht

$$(3) \qquad (\mathfrak{v}\zeta) = 0 .$$

Sind $\xi, \eta$ und $\mathfrak{v}$ gegeben, so können wir $\zeta$ aus (2) und (3) finden

Setzen wir

$$(4) \qquad \zeta = \cos\alpha \cdot \xi + \sin\alpha \cdot \xi'$$

in (2), so ergibt sich

$$(5) \qquad \cos\alpha = (\xi\eta) \{\cos\alpha \cdot (\xi\eta) + \sin\alpha \cdot (\xi'\eta)\}$$

oder

$$0 = \sin\alpha (\xi\eta)(\xi'\eta) ,$$

d. h.

$$\xi' \perp \eta ,$$

wo $\alpha$ der konstante Winkel ist.

( 7 )

Im folgenden möchten wir die Minimallinien

$$\text{(A)} \qquad (\theta_t\theta_t)\,dt^2 + 2\,(\theta_t\theta_\tau)\,dt d\tau + (\theta_\tau\theta_\tau)\,d\tau^2 = 0$$

auf der Kreisfläche (K) betrachten.

(A) Wir untersuchen die besonderen Kreisflächen (K), deren Bogenelement $ds$ mit

$$(1) \qquad ds^2 = (\theta_t\theta_t)\,dt^2 + 2\,(\theta_t\theta_\tau)\,dt d\tau + d\tau^2$$

gegeben wird, wo

$$(2) \qquad t = \text{const.}, \quad \tau = \text{const.}$$

die Parametkrkurven auf (K) sind.

Nach COENEN[1] finden wir

$$(3) \qquad G_m = -\frac{1}{\sqrt{(\theta_t\theta_t)}}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha}{d\tau} - \frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{(\theta_t\theta_t)}} \cdot \frac{\partial\sqrt{(\theta_t\theta_t)}}{\partial\tau}$$

wo $G_m$ der mittleren geodätischen Krümmung von (K),

$$(4) \qquad \cos\alpha\cdot(\theta_t\theta_\tau) = \sqrt{(\theta_t\theta_t)}$$

gilt.

Wir bezeichnen mit $\vartheta$ den Winkel, den die geodätischen Linien des parallelen Systems mit den Kurven $\tau$=const. bilden, indem wir ihn durch die Gleichung

$$(5) \qquad \tan\vartheta = \frac{\sqrt{(\theta_t\theta_t) - (\theta_t\theta_\tau)^2}\,d\tau}{(\theta_t\theta_t)\,dt + (\theta_t\theta_\tau)\,d\tau}$$

definieren, wo $dt$, $d\tau$ die Zunamen der krummlinigen Koordinaten $t$, $\tau$ längs einer der geodätischen Parallelen sind. Ist die Funktion $\vartheta\,(t, \tau)$ bekannt, so ergibt sich die Gleichung dieser geodätischen Linien in endlicher Gestalt durch Integration der Differentialgleichung

$$(6) \qquad (\theta_t\theta_t)\sin\vartheta\,dt + \{(\theta_t\theta_\tau)\sin\vartheta - \sqrt{(\theta -{}_t\theta_t)(\theta_t\theta_\tau)^2}\cos\vartheta\}\,d\tau = 0.$$

(1) COENEN, R.: Sur la courbure géodésique moyenne, Comptes Rendus hebdomadaires des Sciences de l'Académie des Sciences, Paris, Gauthier-Villars, Bd. 186, S. 993.

Ebenso läszt sich mittels Quadraturen die Differentialgleichung der orthogonalen Grenzkreise

$$(7)\qquad (\theta_t\theta_t)\cos\vartheta\, dt + \{(\theta_t\theta_\tau)\cos\vartheta + \sqrt{(\theta_t\theta_t) - (\theta_t\theta_\tau)^2}\sin\vartheta\}\, d\tau = 0$$

integrieren.[2]

Sind $k_1$ und $k_2$ die beiden Hauptkrümmungen, so ist notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dasz die Kreisfläche Kanalfläche sei:[3]

$$(8)\qquad \left\{\frac{\partial(\theta_t\theta_t)}{\partial t} + 2k_1\frac{\partial(\theta_t\theta_\tau)}{\partial t}\right\} + k_2\left\{\frac{\partial(\theta_t\theta_t)}{\partial\tau} + 2k_1\frac{\partial(\theta_t\theta_\tau)}{\partial\tau}\right\}$$

$$+ 2\left\{\frac{\partial k_2}{\partial t} + k_1\frac{\partial k_2}{\partial\tau}\right\}\{(\theta_t\theta_\tau) + k_1\} = 0\,.$$

(**B**) Im Falle einer pseudosphärischen LAMEschen Kreisflächenfamilie $(k)$ lassen sich

$$ds^2 = dt^2 + 2(\theta_t\theta_\tau)\,dt\,d\tau + d\tau^2 + \mathrm{R}^2(\partial\omega/\partial\rho_3)^2,\quad (\theta_t\theta_t) = \cos 2\omega$$

setzen[4]. wo $ds$ das Linienelement von $(k)$ bedeutet.

(**C**) Aus Voss Arbeit[5] können wir wissen, dasz

$$(\theta_t\theta_t):(\theta_t\theta_\tau) = (\theta_t\theta_\tau):(\theta_t\theta_\tau) = (\theta_\tau\theta_\tau):(\theta_\tau\theta_\tau)\,,$$

ist, wo $(\overline{\theta_t\theta_t})$, $(\overline{\theta_t\theta_\tau})$, $(\overline{\theta_\tau\theta_\tau})$; $(\overline{\overline{\theta_t\theta_t}})$, $(\overline{\overline{\theta_t\theta_\tau}})$, $(\overline{\overline{\theta_\tau\theta_\tau}})$ unsere Fundamentalgröszen zweier Kreisflächen $\bar{\mathrm{F}}$ bzw. $\bar{\bar{\mathrm{F}}}$ sind. Da $\bar{\mathrm{F}}$ und $\bar{\bar{\mathrm{F}}}$ die reziproken Radien zweier Flächen $\bar{\mathrm{S}}$ und $\bar{\bar{\mathrm{S}}}$ sind.

(**D**) Werden zwei Kreisflächen in den Parametern $t$, $\tau$ dargestellt, also in beliebiger Weise auf einander abgebildet, so werden die Liniensysteme, die in beiden Kreisflächen zugleich Orthogonalsysteme sind. bestimmt durch die Bedingung

---

(2) LUKAT, M.: BIANCHIs Vorlesungen über Differentialgeometrie (1910), S. 444.

(3) HOPPE, R.: Bedingung einer Kanalfläche nebst einigen Bemerkungen an Kanalflächen, Archiv der Mathemrtik und Physik mit besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse der Lehrer an den höheren Lehranstalten gegründet von. J. A. Grunert, fort gesetzt von R. HOPPE, Leipzig C. A. KOCH, (2) 1, p. 280.

(4) Vgl. LUKAT, M.: BIANCHIS Vorlesungen über Differentialgeometrie (1910), S. 682.

(5) VOSS, A.: Zur Theorie der reziproken Radien, Sitzungsberichte der Bayerischen Akad. der Wiss. Jahrgang 1920, S. 242.

$$\{(\theta_t\theta_t)(\theta_t\theta_\tau)_1 - (\theta_t\theta_\tau)(\theta_t\theta_t)_1\}\, dt^2 + \{(\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau)_1 - (\theta_\tau\theta_\tau)(\theta_t\theta_t)_1\}\, dt d\tau$$
$$+ \{(\theta_t\theta_\tau)(\theta_\tau\theta_\tau)_1 - (\theta_\tau\theta_\tau)(\theta_t\theta_\tau)_1\}\, d\tau^2 = 0$$

wo $(\theta_t\theta_t)$, $(\theta_t\theta_\tau)$, $(\theta_\tau\theta_\tau)$; $(\theta_t\theta_t)_1$, $(\theta_t\theta_\tau)_1$, $(\theta_\tau\theta_\tau)$ unsere Fundamentalgröszen bezeichnen.[1]

Diese Bedingung ist bei konformen Abbildungen identisch erfüllt, bei allen nicht konformen Abbildungen dagegen geht durch jeden Punkt der einen wie der anderen Kreisfläche ein Paar von diesen orthogonalen Kurven.

(**E**) Sind $t$=const. die Erzeugungslinien einer Regelkreisfläche S und bezeichnen $\rho$ und T den Krümmungs-und Torsionsradius der Linie $\tau$=const., $\theta$ den Winkel der Tangente zu dieser Kurve mit der durch den Berührungspunkt gehenden Erzeugungslinie, $\varphi$ den Winkel der Schmiegungsebene derselben Kurve mit der Tangentialebene der Kreisfläche, so können wir den Ausdruck des Quadrates vom Linienelemente auf die folgende Form bringen :[2]

$$(1) \qquad ds^2 = d\tau^2 + 2\cos\theta\, d\tau dt + (\mathrm{M}^2\tau^2 + 2\,\mathrm{N}\tau + 1)\, dt,$$

wo

$$(2) \qquad \begin{cases} \mathrm{M}^2 = \left(\dfrac{\partial\theta}{\partial t} + \dfrac{\cos\varphi}{\rho}\right)^2 + \left\{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} - \dfrac{1}{\mathrm{T}}\right)\sin\theta - \dfrac{\sin\varphi}{\rho}\cos\theta\right\}^2, \\ \mathrm{N} = -\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial t} + \dfrac{\cos\varphi}{\rho}\right)\sin\theta. \end{cases}$$

Aus (1) sehen wir, dasz

$$(3) \qquad (\theta_t\theta_t) = \mathrm{M}^2\tau^2 + 2\,\mathrm{N}\tau + 1\,,\ (\theta_t\theta_\tau) = \cos\theta,\ (\theta_\tau\theta_\tau) = 1$$

gilt.

Weiter können wir untersuchen wie in meiner Arbeit.[3]

(**F**) Im folgenden möchten wir die Loxodromen im allgemeinen Sinne, nämlich diejenigen Kurven auf beliebigen Kreisflächen, welche

---

(1) KORKINE, A.: Sur les cartes géographiques, Math. Ann. XXXV, S. 588.

(2) CHINI, M.: Sopra alcunc deformazioni delle superficie rigate, Atti della Reale Accademia di Torino, XXVI, p. 20.

(3) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geo. der Kreise und Kugeln (XXVII), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. XXI (1938), S. 136.

eine Kurvenschaar unter konstantem Winkel schneiden, enwähnen.

Sind es die Loxodromen der Kurven $t$=const., so ist die Gleichung der Loxodromen[1]:

$$(1)\qquad [\sqrt{(\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau)-(\theta_t\theta_\tau)^2}-a(\theta_t\theta_\tau)]\,d\tau-a(\theta_t\theta_t)\,dt=0,$$

wo a in DINAS Arbeit[1] steht.

Sind $t$=const. und $\tau$=const. aufeinander senkrecht, so folgt aus (1)

$$(2)\qquad [\sqrt{(\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau)}]\,d\tau=a(\theta_t\theta_t)\,dt$$

oder

$$(3)\qquad \sqrt{(\theta_\tau\theta_\tau)}\,d\tau=\sqrt{(\theta_t\theta_t)}\,dt.$$

Wenn sich aus den Parameterlinien ($t$) und ($\tau$) unserer Kreisfläche ein Isothermennetz bilden läszt, können wir setzen

$$(\theta_t\theta_t)=(\theta_\tau\theta_\tau),\quad (\theta_t\theta_\tau)=0.$$

Somit ergibt sich aus (1)

$$(4)\qquad d\tau=a\,dt.$$

(G) Wir betrachten BIANCHIS[2] Translationskreisfläche (T), so gilt das Quadrat des Bogenelements $ds$ gegeben durch

$$(1)\qquad ds^2=dt^2+2(\theta_t\theta_\tau)\,dtd\tau+d\tau^2.$$

*1.* Aus (1) können wir die folgenden Sätze beweisen.

(1) *Zwei Fortschreitungsrichtungen* ($k_1$) *und* ($k_2$) *eines* (T) *-Flächenpunktes* ($t,\tau$), *die nicht seinen Minimaltangenten angehören, sind dann und nur dann aufeinander senkrecht, wenn sie der Bedingung*

$$1+2(\theta_t\theta_\tau)\{k_1+k_2\}+k_1k_2=0$$

(1) DINA. C.: Sopra una curva particolare giacente sopra una superficie in generale, Giornale matematico ad uso degli studenti delle università italiane pubblicato per cura del Prof. G. BATTAGLINI, Nrpoli, XIX, p. 298.

Vgl. MATUMURA, S.: Beiträge zur Geo. der Kreise und Kugeln (XXVIII), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. XXI, S. 192.

(2) BIANCHI, L.: Lopra la deformazione di una classe di superficie, Giornal matematiche ad uso degli studenti delle università italiane pubblicato per cura del Prof. G. GATTAGLINI, XVI, p. 267-270; MATUMURA, S.: Beiträge zur Geo. der Kreise und Kugeln (XXVIII), Mem. of th Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ. Formosa, Japan, Vol. XXI, 1968, p. 192.

*Genüge leisten.*

(2) *Die Parameterlinien* $(\tau)$ *bzw.* $(t)$ *der* (T) *-Fläche sind nicht Minimalkurven.*

(3) *Das Netz der Parameterlinien einer* (T) *-Fläche ist dann und nur dann ein Orthonalsystem, wenn* $(\theta_t\theta_\tau)$ *überall verschwindet.*

(4) *Eine* (T) *-Fläche hat zwei einfach unendliche Scharen von Minimalkurven; sie sind definiert durch die Differentialgleichung*

$$dt^2 + 2\,(\theta_t\theta_\tau)\,dt d\tau + d\tau^2 = 0\,.$$

(5) *Definiert die Differentialgleichung*

$$d\tau/dt = \lambda\,(t, \tau)$$

*auf einer* (T) *-Fläche keine Schar von Minimalkurven, so lautet die Differentialgleichung der Kurven, die auf die durch diese Gleichung definierten einfach unendlich vielen Kurven senkrecht sind:*

$$d\tau/dt = -\ \{(\theta_t\theta_\tau)\,\lambda + 1\} : \{\lambda + (\theta_t\theta_\tau)\}\,.$$

(6) *Die Parameterlinien einer* (T) *-Fläche bilden ein Kurvennetz ohne Umwege.*

(7) *Dafür, dasz sich die Parameterlinien* $(\bar{t})$ *und* $(\bar{\tau})$ *einer* (T) *-Fläche zu einem Isothermennetze anordnen lassen, in dem* $(\bar{t})$ *bzw.* $(\bar{\tau})$ *von Kurve zu Kurve um dieselbe unendlich kleine Grösze wächst, ist notwendig und hinreichend, dassz die zugehörigen Fundamentalgröszen* $(\overline{\theta_t\theta_\tau})$ *die Bedingungen*

$$(\theta_{\bar{t}}\theta_{\bar{\tau}}) = 0$$

*erfüllen.*

(8) *Um zwei* (T) *-Flächen konform aufeinander abzubilden, hat man solche Parameter auf beiden* (T) *-Flächen einzuführen, in denen*

$$(\theta_t\theta_\tau) = (\overline{\theta_t\theta_\tau})$$

*sind.*

(9) *Ein Kurvennetz*

$$\mathrm{A}\,(t, \tau)\,\tau t^2 + 2\,\mathrm{B}\,(t, \tau)\,dt d\tau + \mathrm{C}\,(t, \tau)\,d\tau^2 = 0$$

*auf einer* (T) *-Fläche ist dann und nur dann ein Orthogonalsystem, wenn*

$$\mathrm{C} - 2(\theta_t\theta_\tau)\mathrm{B} + \mathrm{A} = 0 \qquad \text{u. s. w..}$$

*ist.*

*2.* Wir betrachten

$$g_{rs}d\bar{u}^r d\bar{u}^s = g_{rs}du^r du^s .$$

daraus ergibt sich

$$\bar{g}_{rs} = g_{pq}\frac{\partial u^p}{\partial \bar{u}^r}\frac{\partial u^q}{\partial \bar{u}^s},$$

wo

$$dt \equiv du^1,\ d\tau \equiv du^2,\ ds^2 \equiv g_{rs}du^r du^s$$

gesetzt sind.

Die kovariante partielle Ableitung eines kovarianten Vektors $v_r$ wird dann durch

$$v_{rs} = dv_r/du^s - \Gamma^t_{rt}\, v_t$$

definiert, wobei

$$\Gamma^t_{rs} = g^{tp}\left(\frac{\partial g_{rt}}{\partial u^s} + \frac{\partial g_{ps}}{\partial u^r} - \frac{\partial g_{rs}}{\partial u^p}\right),$$

und $g^{tp}$ die kontravarianten Bestimmungszahlen des Tensors $g_{rs}$ seien, d. h.

$$\begin{cases} g^{11} = \dfrac{g_{22}}{\mathrm{G}}, \quad g^{12} = -\dfrac{g_{12}}{\mathrm{G}}, \quad g^{22} = \dfrac{g_{11}}{\mathrm{G}}, \\ \mathrm{G} = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 . \end{cases}$$

Wir wollen als die Grundform der Tensorrechnung die folgende aufnehmen:

$$g_{hk}\, du^h du^k .$$

Wir führen noch die folgenden Bezeichnungen ein:

$$g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2, \quad g^{hk} = E^{hp}E^{kq}g_{pq},$$

$$E^{11} = 0, \quad E^{12} = g^{-\frac{1}{2}} = -E^{21}, \quad E^{22} = 0,$$

$$E_{11} = 0, \quad E_{12} = g^{\frac{1}{2}} = -E_{21}, \quad E_{22} = 0$$

$$A_{hk} = (u_h \mathfrak{v}_k) = -(\mathfrak{v}_{kh} u) = -(u_{hk}\mathfrak{v}) = A_{kh},$$

$$A = A_{11}A_{22} - A_{12}^2, \quad D_{hk} = -(u_h \xi_k) = (u \xi_{hk}) = D_{kh},$$

$$D = D_{11}D_{22} - D_{12}^2, \quad M_r = -(\mathfrak{v}\xi_r).$$

Dann gelten die folgenden Ableitungsgleichungen:

$$u_{hk} = -\tfrac{1}{2} A_{hk} u + D_{hk} \Xi - \tfrac{1}{2} g_{hk} \mathfrak{v},$$

$$\xi_r = -\tfrac{1}{2} M_r u - D_r^s u_s,$$

$$\mathfrak{v}_r = A_r^s u_s + M_r \Xi,$$

*3.* Es sei die Oberfläche von (T) -Fläche im Sinne von LEBESQUE, so folgt

$$L = \iint \sqrt{1-(\theta_t \theta_\tau)^2}\, dt d\tau .$$

Der Massenpunkt hat die kinetische Energie

$$T = \tfrac{1}{2}\{\dot{t}^2 + 2(\theta_t \theta_\tau)\dot{t}\dot{\tau} + \dot{\tau}^2\}$$

und die LAGRANGschen Bewegungsgleichungen lauten:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\bar{t}}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{t}}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial t} = -\dfrac{\partial V}{\partial t}, \\[2ex] \dfrac{d}{d\bar{t}}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\tau}}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \tau} = -\dfrac{\partial V}{\partial \tau}. \end{cases}$$

Weiter können wir erhalten die Formeln in WHITTAKERS Buch,(1) wo wir $\bar{t}$ anstatt $t$ setzen.

*4.* Es sei C eine durch die Gleichungen

(1) WHITTAKER, E. T.: Analytische Dynamik der Punkte und starren Körper, Berlin (1924), p. 433.

$$u^i = f^{(i)}(p), \qquad [i = 1, 2]$$

definierte reelle Kurve auf der Kreisfläche, so folgen

$$u^1 \equiv t, \quad u^2 \equiv \tau,$$

und ist $p$ ein reeller Parameter.

Es seien $P_0$ und $P_1$ die den Parameterwerten $p_0$ bzw. $p_1$ entsprechenden Punkte auf C.

Wenn $\omega^i$ eine Funktion von $u^j$ derart ist, dasz

$$\omega^i = 0 \quad \text{für} \quad p = p_0, \, p_1,$$

ist, dann definiert die Gleichung

$$\bar{u}^i = u^i + \varepsilon \omega^i$$

eine durch $P_0$ und $P_1$ hindurchgehende Nachbarkurve $\bar{C}$ von C, wenn $\varepsilon$ eine Infinitesimale ist.

Weiter können wir untersuchen die Kreisflächen wie in TAKASUS Arbeit.(1)

*5*. Zwei beliebige Kurven

$$(1) \qquad t = t(p), \ \tau = \tau(p)$$

und

$$(1') \qquad t_1 = t_1(p), \quad \tau_1 = \tau_1(p)$$

der (T) -Fläche bilden miteinander einen Winkel $\alpha$, für den man hat

$$(2) \qquad \sin\alpha = \frac{\sqrt{1-(\theta_t\theta_\tau)^2}\,(t'\tau_1' + t_1'\tau')}{\sqrt{t'^2 + 2(\theta_t\theta_\tau)t'\tau' + \tau'^2}\,\sqrt{t_1'^2 + 2(\theta_t\theta_\tau)t_1'\tau_1' + \tau_1'^2}}.$$

Ist

$$1 = (\theta_t\theta_\tau)^2$$

in (2), so kommt zustande

$$(3) \qquad \sin\alpha = 0.$$

*6*. $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}^*$ seien zwei konvexe (T) -Flächen in $R_3$, deren Punkte

(1) TAKASU, T.: Differentialgeometrie II, Sci. Reports of the Tôhoku Imp. Univ., Vol. XVII (1928), S. 435.

eineindeutig durch parallele und gleichgerichtete Flächennormalen einander zugeordnet sind.

Für jede Wahl von gemeinsamen Flächenparametern $(t, \tau)$ seien unsere Fundamentalgröszen in zugeordneten Punkten einander gleich, d. h.

$$(\theta_t\theta_\tau)^* = (\theta_t\theta_\tau),$$

wobei

$$\begin{cases} ds^2 = dt^2 + 2(\theta_t\theta_\tau)\, dt d\tau + d\tau^2, \\ \overset{*}{ds^2} = dt^2 + 2(\theta_t\theta_\tau)^*\, dt d\tau + d\tau^2, \end{cases}$$

da $ds$, $ds^*$ die Bogenelemente bedeuten.

Dann sind die beiden (T) -Flächen bis auf eine Translation miteinander identisch[1].

(**H**) Wir betrachten die Kreisflächen (S), deren Bogenelement ist gleich

$$(1) \qquad ds^2 = d\tau^2 + T^2 (a + b \textstyle\int d_\tau/T^2)^2\, dt^2,$$

so folgt

$$(2) \qquad (\theta_\tau\theta_\tau) = 1, \quad (\theta_t\theta_\tau) = 0, \quad (\theta_t\theta_t) = T^2 (a + b \textstyle\int d\tau/T^2)^2,$$

wo $a$ und $b$ beliebige Konstanten sind[2].

Aus (2) sehen wir, dasz die Gleichung von Minimallinien auf (S) mit

$$(3) \qquad T^2 (a + b \textstyle\int d\tau/T^2)^2\, dt^2 + d\tau^2 = 0$$

gegeben wird.

$(\theta_t\theta_\tau) = 0$ besagt, dasz die Parameterlinien ein Orthogonalsystem bilden.

Weiter sehen wir, dasz ein Kurvennetz

$$(4) \qquad \mathrm{A}(t, \tau)\, dt^2 + 2\,\mathrm{B}(t, \tau)\, dt d\tau + \mathrm{C}(t, \tau)\, d\tau^2 = 0$$

(1) Vgl. NAKAZIMA, S.: Über die Fundamentalgröszen bei Eiflächen, Jap. Journal of Math. 6 (1929), S. 27.

(2) Vgl. Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, III. 3, S. 392.

auf (S) dann und nur dann ein Orthogonalsystem ist, wenn

$$(5)\qquad T(a+b\int d\tau/T^2)\mathrm{C}+\mathrm{A}=0$$

gilt.

Die Parameterlinien einer (S) bilden dann und nur dann ein Kurvennetz ohne Umwege, wenn

$$(6)\qquad \partial/\partial\tau\,\{\tau\,(a+b\int d\tau/T^2)\}=0$$

genügen und nicht verschwinden.

Weiter können wir berichten wie in (G).

( **I** ) Ist auf einer Kreisfläche (K) die Differentialgleichung der Minimalkurven

$$(1)\qquad (\theta_t\theta_t)\,dt^2+2\,(\theta_t\theta_\tau)\,dtd\tau+(\theta_\tau\theta_\tau)\,d\tau^2=0\,,$$

so bestehen in einem beliebigen (K) -Flächenpunkt für die Fortschreitungsrichtungen $d\tau_1:dt_1$ und $d\tau_2:dt_2$ dieser Kurven die Beziehungen

$$(2)\qquad \begin{aligned} &dt_1dt_2:(dt_1d\tau_2+d\tau_1dt_2):d\tau_1d\tau_2\\ &\qquad=(\theta_\tau\theta_\tau):\{-2\,(\theta_t\theta_\tau)\}:(\theta_t\theta_t)\,.\end{aligned}$$

Wir bestimmen diese Richtungen durch die Gleichungen

$$(3)\qquad \begin{cases}\mathrm{A}\,dt_1dt+\mathrm{B}\,(dt_1d\tau+d\tau_1dt)+\mathrm{C}\,d\tau_1d\tau=0\,,\\ \mathrm{A}\,dt_2dt+\mathrm{B}\,(dt_2d\tau+d\tau_2dt)+\mathrm{C}\,d\tau_2d\tau=0\,,\end{cases}$$

oder fassen sie zu einer Gleichung zusammen:

$$(4)\qquad \begin{cases} dt^2\,[\mathrm{A}^2\,dt_1dt_2+\mathrm{AB}\,(dt_1d\tau_2+d\tau_1dt_2)+\mathrm{B}^2\,d\tau_1d\tau_2]\\ \quad+dtd\tau\,[2\,\mathrm{AB}\,dt_1dt_2+(\mathrm{AC}+\mathrm{B}^2)\,(dt_1d\tau_2+d\tau_1dt_2)\\ \quad+2\,\mathrm{BC}\,d\tau_1d\tau_2]+d\tau^2\,[\mathrm{B}^2\,dt_1dt_2+\mathrm{BC}\,(dt_1d\tau_2+d\tau_1dt_2)\\ \quad+\mathrm{C}^2\,d\tau_1d\tau_2]=0\,.\end{cases}$$

Aus (2) und (4) ergibt sich

$$(5)\qquad \begin{cases} dt^2\,\{(\theta_\tau\theta_\tau)\,\mathrm{A}^2-2\,(\theta_t\theta_\tau)\,\mathrm{AB}+(\theta_t\theta_t)\,\mathrm{B}^2\}+2\,dtd\tau\,[(\theta_\tau\theta_\tau)\,\mathrm{AB}\\ \quad-(\theta_t\theta_\tau)\,(\mathrm{AB}+\mathrm{B}^2)+(\theta_t\theta_t)\,\mathrm{BC}]+d\tau^2\,\{(\theta_\tau\theta_\tau)\,\mathrm{B}^2\\ \quad-2\,(\theta_t\theta_\tau)\,\mathrm{BC}+(\theta_t\theta_t)\,\mathrm{C}^2\}=0\,.\end{cases}$$

Sind insbesondere $(\theta_t\theta_\tau) = \mathrm{B} = 0$ in (5), so folgt aus (5)

$$(6) \qquad (\theta_\tau\theta_\tau)\,\mathrm{A}^2\,dt^2 + (\theta_t\theta_t)\,\mathrm{C}^2\,d\tau^2 = 0\,,$$

oder

$$(7) \qquad dt : d\tau = \pm\, i\,\sqrt{(\theta_t\theta_t)}\,\mathrm{C} : \sqrt{(\theta_\tau\theta_\tau)}\,\mathrm{A}\,, \quad i = \sqrt{-1}\,.$$

Setzen wir jetzt

$$(8) \qquad \begin{cases} (dt/d\tau)_1 = i\,\sqrt{(\theta_t\theta_t)}\,\mathrm{C} : \sqrt{(\theta_\tau\theta_\tau)}\,\mathrm{A}\,, \\ (dt/d\tau)_2 = -\,i\,\sqrt{(\theta_t\theta_t)}\,\mathrm{C} : \sqrt{(\theta_\tau\theta_\tau)}\,\mathrm{A}\,, \end{cases}$$

so haben wir

$$(9) \qquad (dt/d\tau)_1 = -\,(dt/d\tau)_2\,.$$

# ÜBER FLÄCHEN UND KURVEN (XX):

## Einige Bemerkungen über Flächen und Kurven

Sôzi MATUMURA

(Accepted for publication, December 12, 1938)

Im folgenden möchten wir über Kurven und Flächen einige Bemerkungen machen.

### ( 1 )

(**A**) Wir betrachten

$$(1) \qquad s = \int \frac{\lambda\, d\rho}{\sqrt{(\rho/a)^{\mu}-1}}, \qquad a = \text{const.},$$

wo $\rho$ der gewönliche Krümmungsradius einer ebenen Kurve und $s$ ihre Bogenlänge bedeutet.

Diese Kurven sind in natürlichen Koordinaten definiert nach den Werten der Parameter $\lambda$, $\mu$ Cykloiden, Hypo-und Epicykloiden, Lemniskate, Parabel, gleichseitige Hyperbel u. a..

Aus (1) folgt

$$(2) \qquad \tan\varphi = \frac{1}{3}\frac{d\rho}{ds} = \frac{\sqrt{(\rho/a)^{\mu}-1}}{3\lambda},$$

wo $\varphi$ die Deviation unserer Kurven ist.

(**B**) Wenn wir zu einer Tangente einer ebenen Kurve eine unendlich nahe parallele Sehne ziehen und deren Mittelpunkt mit dem Berührungspunkte verbinden, so heisst die Gerade Aberrations-Axe (nach TRANSON, Journ. de Math. 1841).

[Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ. Formosa, Japan, Vol. XXI, No. 8 (b), February, 1939.]

(1) MATUMURA, S.: Über einen affingeometrischen Satz und die Deviation ebener Kurven, Tôhoku Math. Journ., Vol. 36 (1932), p. 189.

Für den Winkel $\varphi$, welchen sie mit der Normale bildet, haben wir schon auf anderem Wege die Gleichung[1]:

$$(1) \qquad \tan\varphi = \tfrac{1}{3} \cdot d\rho/ds = \tfrac{1}{3} \cdot \rho'/\rho$$

bewiesen, in der $\rho$ den Krümmungsradius der Kurve, $\rho'$ den der Evolute bezeichnet.

Sind P und Q die Funktionen der

$$(2) \qquad \tfrac{1}{3} \int d\rho/tg\varphi\,,$$

so haben diejenigen Kurven, für welche

$$(3) \qquad (\int P\,dx)^2 + (\int P\,dy)^2 = Q^2$$

ist, als Krümmungsradius

$$(4) \qquad 3\int \tan\varphi\, ds = \frac{PQ\sqrt{P^2-Q'^2}}{P(P^2-Q'^2)+Q(P'Q-PQ'')}\,,$$

wo die Ableitungen nach $s$ genommen sind.[3]

Rechnen wir den Bogen $s$ einer Kurve (M) von einem bestimmten Anfangspunkt aus, so bildet der Ort der Schwerpunkte dieses Kurvenbogens die barycentrische Linie (G).

Ist (M) eine ebene Kurve, und bedeuten $x$ und $y$ die Koordinanten des Schwerpunkts G, so werden $x$ und $y$ in ihrer Beziehung mit dem Bogen $s$ und dem davon abhängigen Krümmungsradius $\rho$ durch die Gleichungen dargestellt[4]:

$$\frac{d(sx)}{ds} = \frac{sy}{\rho} - s\,; \quad \frac{d(sy)}{ds} = -\frac{sx}{\rho}\,,$$

oder

(1) MATUMURA, S.: Über einen affingeometrischen Satz und die Deviation ebener Kurnen, Lôheku Math. Journ. Vol. 36 (1932), 189.

(2) Vgl. PIRGNDINI, G.: Note géométrique, Nouvelles Annales de mathématiques, (3) V, p. 460.

(3) CESARO, E.: Sur une coudition définissant des famillcs de ceurbas, Mathesis, Recueil mathématique à l'usage des éeoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne publié par P. MANSION et J. NEUBERG, Grand. Hoste, Paris. Gauthier-Villars, 8°, VI, p. 33.

(4) CESARO, E.: Les lignes barycentriquea, Nouvelles Annales ds mathématiques, (3) V, p. 511.

$$\frac{d(x \int d\rho/3\, tg\varphi)}{d\rho/3\, tg\varphi} = \frac{y \int ds/3\, tg\varphi}{\rho} - \int \frac{d\rho}{3\, tg\varphi};$$

$$\frac{d(y \int d\rho/3\, tg\varphi)}{d\rho/3\, tg\varphi} = - \frac{x \int ds/3\, tg\varphi}{\rho}.$$

(**C**) Es wird bewiesen, dasz die „intrinsic equation“ der elastischen Kurve ist[1]

(1) $1/\rho = 2/kc \cdot dn \cdot s/kc$.

Aus (1) ergibt sich

(2) $\tan \varphi = \frac{1}{3} \frac{d\rho}{ds} = \frac{1}{3} \cdot \frac{kc}{2} \cdot \frac{d}{ds}\left(dn \frac{s}{kc}\right).$

## ( 2 )

Im folgenden möchten wir AUERBACHS Arbeit[2] bemerken. Nehmen wir die Geschwindigkeit von Bogen statt der Geschwindigkeit von Sektor, so folgt

(1′) $\rho = \frac{1}{4}\left\{\overline{PQ}^4 + \overline{PQ}^2\left(\frac{d\overline{PQ}}{d\varepsilon}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$

anstatt (1) in Auerbachs Arbeit.

Wenn $\frac{d\overline{PQ}}{d\varepsilon} = 0$ in (1′) gilt, so folgt

(2) $\rho = \frac{1}{4}\overline{PQ}^2$.

In diesem Falle gilt auch

$ss' \,//\, 12$.

## ( 3 )

Für die isotrope Kurve $\mathfrak{x}(t)$ läszt sich nach Cartan die Pseudobogenlänge $\bar{s}(\mathfrak{x})$ in die Form umwandeln:

(1) GREENHILL, A. G.: The intrinsic equation of the elastic curve, The Messenger of mathematics, London and Cambridge, (2) VIII, p. 82.

(2) AUERBACH, H.: Sur un probleme de M. Ulam concernant lequilibre des corps flottants, Studia Mathematica, Tom VII, p. 121.

$$d\bar{s}(\mathfrak{x}) = i\frac{(\dot{\mathfrak{x}}, \ddot{\mathfrak{x}}, \dddot{\mathfrak{x}})}{\ddot{\mathfrak{x}}^2}\,dt^2 \quad (\cdot \text{ bedeutet } d/dt)$$

und damit gilt

$$\frac{ds}{d\sigma} = \rho = \frac{\ddot{\mathfrak{e}}^2(\dot{\mathfrak{x}}, \ddot{\mathfrak{x}}, \dddot{\mathfrak{x}})}{\ddot{\mathfrak{x}}^2(\mathfrak{e}, \dot{\mathfrak{e}}, \ddot{\mathfrak{e}})},$$

wo $\rho$ der Krümmungsradius von $\mathfrak{x}$ ist.

Weiter können wir untersuchen wie in SÜSS' Arbeit[1].

## ( 4 )

Es seien Eilinie $\Gamma$ und eine Ebene.

P und $\bar{\text{P}}$ seien zwei Punkte auf $\Gamma$, die den Umfang von $\Gamma$ halbieren, so nennen wir P und $\bar{\text{P}}$ die Gegenpunkte von $\Gamma$.

Sind die Deviationen von $\Gamma$ im Gegenpunkte immer einander gleich, so muss $\Gamma$ eine Zentralkurve $(\rho=\bar{\rho})$ sein.

Ist die Summe zweier Deviationen von $\Gamma$ im Gegenpunkte konstant, so muss $\Gamma$ die Pseudozentralkurve $(\rho + \bar{\rho} = \text{const:})$ sein.

Dieser Beweis ist klar aus der Formel[2]

$$\tan\varphi = \tfrac{1}{3}\cdot d\rho/d\sigma\,.$$

## ( 5 )

KUBOTA hat den folgenden Satz bewiesen[3].

*Wird eine ebene, stetig differenzierbare Kurve von den Geraden einer beliebigen Parallelenschar in je n Punkten geschnitten, derart,*

(1) SÜSS, W.: Zur relativen Differentialgeometrie, IV, Tôhoku Math. Journ., Vol. 29, S. 361.

(2) Vgl. MATUMURA, S.: Über affingeometrischen Satz und die Deviation ebener Kurven, Tôhoku Math Journ., Vol. 36 (1932), S. 189.

(3) KUBOTA, T.: Characteristic properties of algebraic figures, Tokyo Buturigakkô Zassi, Vol. 47 (1938), p. 243.

KUBOTA, T. and KAKEYA, S.: On the Algebraic Correspondence, Tôhoku Mathematical Journal, Vol. 13 (1918), p. 296.

*dasz der Schwerpunkt der n Punkte auf einer Geraden wandert, wenn die Gerade die Schar durchläuft, so ist die Kurve eine algebraische Kurve n-ter Ordnung.*

Der Betrachtung liegt folgende Begriffsbildung zugrunde: Sei 1 eine Gerade durch O, die die Kurve in $P_1, P_2, \cdots, P_n$ schneidet. Man bestimme P so, dasz

$$\frac{n}{OP} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{OP_\nu}$$

wird. Bewegt sich P auf einer Geraden $g$, wenn 1 den Büschel durch O beschreibt, so sagt man: O besitzt eine Polargerade $g$. Nimmt man nun an, dasz jeder Punkt der Ebene bezüglich der vorgelegten Kurve eine Polargerade besitzt, so folgt aus der Betrachtung der somit erklärten Polarverwandtschaft auf Grund eines Satzes von KUBOTA und KAKEYA, dasz die Kurve algebraisch und von der Ordnung $n$ ist. Da weiter aus einer Bemerkung FUZIWARAS folgt, dasz, wenn jeder Punkt einer Geraden $h$ bezüglich der vorgelegten Kurve eine Polare besitzt, überhaupt jeder Punkt eine Polare besitzt, so ist damit der eingangs genannte Satz dargetan.

Wir betrachten

$$(1) \qquad \frac{1}{\rho_1 \sin^3 \tau_1} + \frac{1}{\rho_2 \sin^3 \tau_2} + \dots + \frac{1}{\rho_n \sin^n \tau^n} = 0$$

$$(2) \qquad \frac{n}{OP} = \frac{1}{OP_1} + \frac{1}{OP_2} + \dots + \frac{1}{OP_n}$$

in KÜBOTAS Arbeit.[1]

Im folgenden möchten wir KUBOTAS Zeichen benutzend etwas andern Beweis liefern.

Aus

$$(3) \qquad \rho_i = \frac{\{r_i^2 + (r_i^1)^2\}^{\frac{3}{2}}}{\{r_i^2 + 2(r_i')^2 - r_i r_i''\}}, \quad \sin \tau_i = \frac{r_i}{\sqrt{r_i^2 + r_i'^2}}$$

folgt

$$(4) \qquad \frac{1}{\rho_i \sin^3 \tau_i} = \frac{r_i^2 + 2(r_i')^2 - r_i r_i''}{r_i^2};$$

unserer Bedingnng ist aber:

$$(5)\qquad \{r_i^2 + 2(r_i')^2 - r_i r_i''\} / r_i^3 = 0$$

oder

$$(6)\qquad 1/r_i + (1/r_i)'' = 0\,.$$

Wir haben aber

$$(7)\qquad n/r = 1/r_1 + 1/r_2 + \dots + 1/r_n\,,$$

da folgt

$$(8)\qquad 1/r_1 + (1/r_1)'' + r_2 + (1/r_2)'' + \dots = 0$$

oder

$$(9)\qquad \frac{1}{\rho_1 \sin^3 \tau_1} + \frac{1}{\rho_2 \sin^3 \tau_2} + \dots + \frac{1}{\rho_n \sin^3 \tau_n} = 0\,,$$

w. z. b. w..

Weiter können wir leicht die Bedingung dafür erkennen, dasz P immer ein Punkt ist, da in unserem Falle

$$(10)\qquad r^2 + r'^2 = 0$$

gilt.

Sind $P_i$ $[i=1,2,\dots,n]$ Punkte auf je $n$ Eilinien und

$$(11)\qquad np(\theta) = p_1(\theta) + p(\theta) + \dots + p_n(\theta)\,,$$

so folgt aus (11)

$$(12)\qquad np''(\theta) = p_1''(\theta) + p_2''(\theta) + \dots p_n''(\theta)\,;$$

also ergibt sich aus (11) und (12)

$$(13)\qquad n\rho = \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_n\,,$$

wo $p$, $p_i$ die Stützfunktionen von $n$ Eilinien sind.

Wenn P immer einen festen Punkt hindurch geht, so entsteht

$$(14)\qquad 0 = n\rho = \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_n\,.$$

(14) *ist unsere Bedingung.*

Aus (11) folgt

$$(15)\quad \begin{cases} np'(\theta) = p_1'(\theta) + (p_2'(\theta) + \dots + p_n'(\theta), \\ np'(\theta+\pi) + p_1'(\theta+\pi) + p_2'(\theta+\pi) + \dots p'(\theta+\pi), \end{cases}$$

woraus sich ergibt

$$\begin{cases} n\,\{p'(\theta) + p'(\theta+\pi)\} = \{p_1'(\theta) + p_1'(\theta+\pi)\} + \dots \\ \qquad\qquad + \{p_n'(\theta) + p_n'(\theta+\pi)\} \end{cases}$$

oder

$$s_1 + s_2 + \dots + s_n = 0,$$

wenn $s = 0$ ist, wo $s$, $s_1$, ... die Tangentenprojektionen der Sehne zwischen den Berührüngspunkten bezeichnen.

**N. B.** Betrachten wir

$$(16)\quad \frac{n}{\mathrm{OP}} = \frac{\mathrm{C}_1}{\mathrm{OP}_1} + \frac{\mathrm{C}_2}{\mathrm{OP}_2} + \dots + \frac{\mathrm{C}_n}{\mathrm{OP}_n}$$

anstatt (2), so ergibt sich

$$(17)\quad \frac{\mathrm{C}_1}{\rho_1 \sin^3\lambda_2} + \frac{\mathrm{C}_2}{\rho_2 \sin^3\lambda_2} + \dots + \frac{\mathrm{O}_n}{\rho_n \sin^3\lambda_n} = 0$$

anstatt (1), wo

$$(18)\quad \mathrm{C}_i \quad [i=1,2,\dots,n]$$

konstant sind.

Besteht

$$(19)\quad nr = r_1 + r_2 + \dots + r_n$$

anstatt (7), so folgt

$$(20)\quad \frac{nr'}{r} = \frac{r_1' + r_2' + \dots + r_n'}{r_1 + {}_2 + \dots + r_n}.$$

Wenn $r'/r = \text{const.}$, d. h. die Kurve P logarithmische Spirale ist, so folgt

$$(21)\quad \sum_{i=1}^{n} r_i = e^{c_1\theta + c_2},$$

wo $c_i$ die Konstanten und $r_i = r_i(\theta)$ ist.

Nach DOETSCHS Arbeit(2) können wir

$$(22) \qquad \frac{nh'}{h} = \frac{h_1' + h_2' + \dots + h_n'}{h_1 + h_2 + \dots + h_n}$$

anstatt (19) setzen, so folgt aus (21)

$$(23) \qquad \sum_{i=1}^{n} h_i = e^{c_1\theta + c_2}$$

wo $h_i = h_i(\theta)$ ist.

Die Zeichen findet man in DOETSCHS Arbeit(1).

$$(24) \qquad r = \text{const.}$$

in (7), so

$$(25) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i \tan \lambda_i} = 0.$$

## ( 6 )

Wir betrachten

$$(1) \qquad \rho = r \sin \alpha + dr/d\omega \cos \alpha$$

in GOUPILLIÈRES Arbeit(2).

Wenn

$$(2) \qquad \rho = r$$

in (1), so

$$(3) \qquad r(1 - \sin \alpha) = dr/d\omega \cdot \cos \alpha$$

oder

$$(4) \qquad r = \exp.\left(\int \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} d\omega\right).$$

(1) DOETSCH, G.: Kovexe Kurven und Fuszpunktkurven, Mathematische Zeitschrift 41 (1936). S, 718.

(2) HATON DE LA GOUPILLIERE: Recherches sur les developpoides, Annales de la societe scientifique de Bruxelles, Bruxelles, II, B., p. 1.

## ( 7 )

Von H. MINKOWSKI stammt der Satz, dasz Eiflächen konstanter Breite und solche konstanten Umfangs miteinander identisch seien.

Mit der MINKOWSKIschen Methode wollen wir hier den weitergehenden Satz beweisen:

*Haben zwei Eiflächen in allen Richtungen gleiche (i. A. nicht konstante) Summe von Krümmungsradien im Gegenpunkte, so haben sie in allen Richtungen auch gleich Umfänge und umgekehrt*[1].

**Beweis:** $\phi$, $\vartheta$ seien Polarkoordinaten auf dem sphärischen Bild.

$\rho(\vartheta,\phi)$ und $\sigma(\vartheta,\phi)$ seien die Krümmungsradien an den beiden Eiflächen, so sind

$$(1)\qquad \begin{cases} \rho(\vartheta,\phi) = \sum_0^\infty{}^{\mathrm{T}}\, X_{\mathrm{T}}(\vartheta,\phi), \\ \sigma(\vartheta,\phi) = \sum_0^\infty{}^{\mathrm{T}}\, Y_{\mathrm{T}}(\vartheta,\phi), \end{cases}$$

woraus folgen:

$$(2)\qquad \begin{cases} \rho(\vartheta,\phi) + \rho(\pi-\vartheta,\pi+\phi) = 2\sum_0^\infty{}^{\lambda}\, X_{2\lambda}(\vartheta,\phi), \\ \sigma(\vartheta,\phi) + \sigma(\pi-\vartheta,\pi+\phi) = 2\sum_0^\infty{}^{\lambda}\, Y_{2\lambda}(\vartheta,\phi). \end{cases}$$

Sollen beide Flächen in jeder Richtung

$$\rho(\vartheta,\phi) + \rho(\pi-\vartheta,\pi+\phi) = \sigma(\vartheta,\phi) + \sigma(\pi-\vartheta,\pi+\phi)$$

besitzen, so muss

$$(3)\qquad X_{2\lambda} = Y_{2\lambda} \qquad [\lambda = 0,1,2,\dots]$$

sein.

$U(\vartheta,\phi)$ und $V(\vartheta,\phi)$ seien die Umfänge der beiden Eiflächen in der Richtung $(\vartheta,\phi)$, d. h. die Umfänge der senkrechten ebenen Projektionen in der Richtung des Kugelradius zum Punkte $(\vartheta,\phi)$ auf dem sphärischen Bilde.

Bezeichnen wir mit $P_n$ das $n$-te LEGENDREsche Polynom, so erhalten wir nach MINKOWSKI zunächst

(1) Umkehrung ist schwierig während der Satz selbst sehr einfach ist.

$$U(0,\phi) = \int_0^{2\pi} \rho\left(\tfrac{\pi}{2}, \phi\right) d\phi = \sum_{\tau=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} X_\tau\left(\tfrac{\pi}{2}, \phi\right) d\phi$$
$$= 2\pi \sum_{\lambda=0}^{\infty} P_{2\lambda}(0)\, X_{2\lambda}(0,\phi)$$

und allgemein

$$(4) \quad \begin{cases} U(\delta,\phi) = 2\pi \sum_{\lambda=0}^{\infty} P_{2\lambda}(0)\, X_{2\lambda}(\delta,\phi), \\ V(\delta,\phi) = 2\pi \sum_{\lambda=0}^{\infty} P_{2\lambda}(0)\, Y_{2\lambda}(\delta,\phi). \end{cases}$$

Aus (3) folgt aber nach (4) zunächst unsere erste Behauptung:

$$(5) \quad U(\delta,\phi) = V(\delta,\phi).$$

Umgekehrt folgt aus (4) und (5) aber wieder (3) und somit wegen (2) auch die Umkehrung der ersten Behauptung[1], w. z. b. w..

**N. B.** Anstatt

$$\rho(\delta,\phi) + \rho(\pi-\delta, \pi+\phi)$$

und

$$\delta(\delta,\phi) + \sigma(\pi-\delta, \pi+\phi)$$

können wir im allgemeinen andere geometrische Grössen annehmen.

## ( 8 )

Im folgenden möchten wir die Ebenengeometrie erwähnen.

Bezeichnen wir mit R den Radius des umgeschriebenen Kreises von $\triangle ABC$, dessen Inhalt F gleich ist und setzen

$$s = \overline{AB} + \overline{BC} + CA,$$

so folgt

$$(1) \quad A + B + C = \pi,$$

$$(2) \quad \sin A + \sin B + \sin C = s/2R,$$

(1) Vgl. NAKAZIMA, S.: Eiflächenpaare gleicher Breiten und gleicher Umfänge, Jap. Journ., of Mathematics, Vol. VII (1930), p. 225.

(3) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 2F / R^2$.

Aus (3) erhalten wir

(4) $\cos 2A + \cos 2B \cdot dB / dA + \cos 2C \cdot dC / dA = 0$.

Aus (1), (2) ergibt sich

(5) $1 + dB / dA + dC / dA = 0$.

(6) $\cos A + \cos B \cdot dB / dA + \cos C \cdot dC / dA = 0$.

Danach folgt aus (4), (5), (6)

$$(7) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos A & \cos B & \cos C \\ \cos 2A & \cos 2B & \cos 2C \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$(8) \quad \frac{\cos B - \cos A}{\cos 2B - \cos 2A} = \frac{\cos C - \cos A}{\cos 2C - \cos 2A},$$

so erhalten wir den

**Satz:** *Aus Maximum-oder Minimumbedingung ergibt sich*

$AB = AC$ *oder* $CB = CA$ *oder* $BC = BA$,

*wenn* $R = \text{const.}$, $s = \text{const.}$.

Weiter können wir untersuchen wie in meiner Arbeit[1].

(1) NAKAZIMA, S.: Some relations between the fundamental quantities of the triangles, which inscreibed in a given circle, Tokyo Buturi-gakkô Zassi 35 (1935), p. 75.

NAKAZIMA, S.: Some Inequalities between the Fundamental Quantities of the Triangle, Tôhoku Math. Journ. 25 (1925), p. 115.

MATSUMURA, S.: On some problems, Jaurnal of the Mathematical Association of of Japan for Secondary Education, Vol. XVI (1934), p. 94.

# BEITRÄGE ZUR GEOMETRIE DER KREISE UND KUGELN (XXX)

Sôzi MATUMURA

(Accepted for publication, February, 27, 1939.)

Im folgenden möchten wir uns mit einigen Sätzen über Kreise und Kugeln beschäftigen.

## ( 1 )

Hier behandeln wir meine fundamentalen Gröszen[1] $(\theta_t\theta_t)$, $(\theta_t\theta_\tau)$, $(\theta_\tau\theta_\tau)$ von Kreisflächen.

(**A**) Wir wollen eine Kreisfläche $\mathfrak{x}$ mit **K** bezeichnen und uns die Abbildung nach parallelen Tangenten klar machen.

Die Abbildung nach parallelen Tangenten an die Parameterkurven ist nur möglich, wenn das System konjugiert ist, denn aus $\bar{\mathfrak{x}}_t = P\mathfrak{x}_t$ und $\bar{\mathfrak{x}}_\tau = Q\mathfrak{x}_\tau$ folgt wegen $\bar{\mathfrak{x}}_{t\tau} = \bar{\mathfrak{x}}_{\tau t}$:

$$(1) \qquad \mathfrak{x}_{t\tau} = -\frac{P_\tau}{P-Q}\mathfrak{x}_t + \frac{Q}{P-Q}\cdot\mathfrak{x}_\tau .$$

So gilt:

*Die Abbildung nach parallelen Tangenten führt konjugierte Systeme in konjugierte Systeme über.*

Da ferner:

$$(2) \qquad \begin{cases} (\overline{\theta_t\theta_t}) = \bar{\lambda}\, P^2/\lambda\, (\theta_t\theta_t)\,, & (\overline{\theta_t\theta_\tau}) = \bar{\lambda}\, PQ/\lambda\, (\theta_t\theta_\tau)\,, \\ (\overline{\theta_\tau\theta_\tau}) = \bar{\lambda}\, Q^2/\lambda\, (\theta_\tau\theta_\tau)\,, \end{cases}$$

deren $\lambda$ in meiner Arbeit[2] steht.

---

[Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ. Formosa, Japan, Vol. XXI, No. 9, April, 1939.]

(1) NAKAZIMA, S.: Kugelgeo. von MÖBIUS, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ. Formosa Japan, Vol. 2, S. 36.

(2) NAKAZIMA, a. a. O., S. 36.

Aus (2) sieht man, dasz

$$(3)\qquad \overline{(\theta_t\theta_t)}:\overline{(\theta_t\theta_\tau)}:\overline{(\theta_\tau\theta_\tau)} = \mathrm{P}^2(\theta_t\theta_t):\mathrm{PQ}(\theta_t\theta_\tau):\mathrm{Q}^2(\theta_\tau\theta_\tau)$$

besteht.

Die Minimallinien

$$(4)\qquad \overline{(\theta_t\theta_t)}\,dt^2 + 2\,\overline{(\theta_t\theta_\tau)}\,dtd\tau + \overline{(\theta_\tau\theta_\tau)}\,d\tau^2 = 0$$

transformieren sich in die

$$(5)\qquad \mathrm{P}^2(\theta_t\theta_t)\,dt^2 + 2\,\mathrm{PQ}(\theta_t\theta_\tau)\,dtd\tau + \mathrm{Q}^2(\theta_\tau\theta_\tau)\,d\tau^2 = 0\,.$$

(**B**) Wir betrachten die Kreisfläche **K**, deren Bogenelement $ds$ mit

$$(1)\qquad ds^2 = (\theta_t\theta_t)\,dt^2 + 2\,(\theta_t\theta_\tau)\,dtd\tau + d\tau^2$$

gegeben[(1)] ist.

Allgemein sei die Lage eines Massensystems S durch die Parameter $t$ und $\tau$ bestimmt und habe die lebendige Kraft den Ausdruck

$$(2)\qquad \mathrm{T} = \tfrac{1}{2}\,\{(\theta_t\theta_t)\,t'^2 + 2\,(\theta_t\theta_\tau)\,t'\tau' + d\tau'^2\},$$

wobei $(\theta_t\theta_t)$, $(\theta_t\theta_\tau)$ analytische Funktionen von $t$ und $\tau$ seien und sich in der Umgebung des Wertsystems $t=\tau=0$, welches kurz durch 0 bezeichnet werde, regulär verhalten und für dieses die Werte $(\theta_t\theta_t)_0$, $(\theta_t\theta_\tau)_0$ annehmen mögen.

Dann ist allgemein

$$(3)\qquad (\theta_t\theta_t) - (\theta_t\theta_\tau)^2 > 0\,,$$

also speziell

$$(4)\qquad (\theta_t\theta_t)_0 - (\theta_t\theta_\tau)_0^2 > 0\,.$$

Die wirkenden Kräfte mögen ein nur von $t$ und $\tau$ abhängiges Potential U haben, welches ebenfalls in der Umgebung von 0 eine reguläre analytische Funktion der Parameter und in der Form

$$(5)\qquad \mathrm{U} = \tfrac{1}{2}\,(\mathrm{L}t^2 + 2\,\mathrm{M}t\tau + \mathrm{N}\tau^2) + \ldots$$

entwickelbar sei, wobei die weggelassenen Glieder in den Grössen $t$

(1) Vgl. NAKAZIMA, a. a. O., S. 36.

und $\tau$ von mindestestens dritter Dimension, L, M, N aber Konstante seien, für welche die Ungleichungen

$$(6) \qquad LN - M^2 > 0, \qquad L > 0$$

bestehen.

Alsdann hat das Potential in 0 ein Minimum, und das Syetem ist in der Lage 0 im labilen Gleichgewicht.

Weiter kann man untersuchen wie in KNESERS Arbeit.[2]

Wir setzen (1) in die Form

$$(7) \qquad ds^2 = (\theta_t\theta_t)\,dt^2 + 2\,(\theta_t\theta_\tau)\,dtd\tau + (\theta_\tau\theta_\tau)\,d\tau^2,$$

wo $(\theta_\tau\theta_\tau) = 1$ ist.

Ein fastrhombisches $(t, \tau)$ -Kurvennetz mit dem Linienelement

$$(8) \qquad \begin{cases} \dot{s}^2 = (\theta_t\theta_t)\,\dot{t}^2 + 2\,(\theta_t\theta_\tau)\,\dot{t}\,\dot{\tau} + (\theta_\tau\theta_\tau)\,\dot{\tau}^2 \\ \quad \equiv E\,\dot{t}^2 + 2\,F\,\dot{t}\,\dot{\tau} + G\,\dot{\tau}^2, \\ E = (\theta_t\theta_t), \quad F = (\theta_t\theta_\tau), \quad G = (\theta_\tau\theta_\tau), \end{cases}$$

ist durch die Forderung gleicher Gegenseitensummen für jedes Maschenviereck definiert, d. h. es musz

$$(9) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{t_0}^{t_0+h} \{\sqrt{E(t, \tau_0)} + \sqrt{E(t, \tau_0+h)}\}\, dt \\ \qquad\qquad = \displaystyle\int_{\tau_0}^{\tau_0+h} \{\sqrt{G(t_0, \tau)} + \sqrt{G(t_0+h, \tau)}\}\, d\tau \end{cases}$$

für jede beliebige Stelle $t_0$. $\tau_0$ und Maschenweite $h$ identisch erfüllt sein. Durch Entwicklung der Funktionen E und G nach Potenzen von $h$ erhält man für (9)

$$\begin{cases} 2\,h\,\sqrt{E} + \dfrac{h^3}{6}\left\{\dfrac{\partial^2\sqrt{E}}{\partial t^2} + 3\,\dfrac{\partial^2\sqrt{E}}{\partial \tau^2}\right\} \\ \qquad + \dots = 2\,h\,\sqrt{G} + \dfrac{h^3}{6}\left\{\dfrac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial \tau^2} + 3\,\dfrac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial t^2}\right\} + \dots, \end{cases}$$

oder

(2) KNESER, A.: Bewegungsvorgänge in der Umgebung instabiler Gleichgewichtslagen, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 118 (1897), S. 203.

$$2h\sqrt{E} + \frac{h^3}{6}\left\{\frac{\partial^2\sqrt{E}}{\partial t^2} + 3\frac{\partial^2\sqrt{E}}{\partial\tau^2}\right\} + \dots = 2h,$$

wobei unter E, G und deren Ableitungen die Funktionswerte an der Stelle $t_0$, $\tau_0$ zu verstehen sind, und daraus weiter durch die Koeffizientenvergleichung

$$\sqrt{E} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2\sqrt{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Schreibt man für die beliebige Stelle $t_0$, $\tau_0$ wieder $t$, $\tau$, dann ergibt sich schlieszlich als notwendige Bedingung eines fastrhombischen Kurvennetzes:

$$(10) \qquad \sqrt{E} = 1 = \varphi(t+\tau) + \psi(t-\tau),$$

wobei $\varphi$ und $\psi$ willkürliche Funktionen bedeuten.

Die Bedingung (10) ist aber auch hinreichend, da (9) durch (10) tatsächlich befriedigt wird,

Für $\varphi = \psi =$ const. spezialisieren sich die fastrhombischen Netze in die genau rhombischen sogenannten TSCHEBYSCHEFF-Netze.(3)

(C) Setzen wir $d\tau : dt = \lambda$ in unsere Minimallinien

$$(1') \qquad (\theta_t\theta_t)\,dt^2 + 2(\theta_t\theta_\tau)\,dt d\tau + (\theta_\tau\theta_\tau)\,d\tau^2 = 0,$$

so entsteht

$$(2) \qquad (\theta_t\theta_t) + 2(\theta_t\theta_\tau)\lambda + (\theta_\tau\theta_\tau)\lambda^2 = 0,$$

woraus folgt

$$(3) \qquad (\theta_t\theta_t):(\theta_t\theta_\tau):(\theta_\tau\theta_\tau) = \lambda_1\lambda_2 : -\tfrac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2):1,$$

wo $\lambda_i$ die Wurzeln von (2) sind.

Setzen wir daher die proportionalen Werte in die Bedingung

$$(4) \qquad (\theta_t\theta_t) + (\theta_t\theta_\tau)(k_1+k_2) + (\theta_\tau\theta_\tau)k_1k_2 = 0$$

ein, so kommt:

$$(5) \qquad \lambda_1\lambda_2 - \tfrac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2)(k_1+k_2) + k_1k_2 = 0,$$

wofür man auch schreiben kann:

(3) TSCHEBYSCHEFF, P. L.: Sur la coupe des vetements, Oeuvres II, S. 708; ferner VOSZ, A., Math. Annalen 19 (1882), S. 1-26 und BIEBERBACH, L., Sitzungsber, d. Berl. Akad. 1926, S. 294-321.

$$(6) \qquad \frac{k_1 - \lambda_1}{k_1 - \lambda_2} : \frac{k_2 - \lambda_1}{k_2 - \lambda_2} = -1,$$

was schon wohl bekannt ist, so dasz die Richtungen (1) von den Richtungen (4) harmonisch getrennt werden.

(**D**) Wir setzen

$$(1) \qquad \{(\theta_t\theta_t)\, dt^2 + 2\,(\theta_t\theta_\tau)\, dtd\tau + (\theta_\tau\theta_\tau)\, d\tau^2\} : \{dt^2 + d\tau^2\}$$

in die Form

$$(2) \qquad \{(\theta_t\theta_t) + 2\,(\theta_t\theta_\tau)\,\lambda + (\theta_\tau\theta_\tau)\,\lambda^2\} : \{1 + \lambda^2\}$$

und betrachten den Fall, dasz (2) von $\lambda$ anabhängig ist.

Dies aber ist dann und nur dann der Fall, wenn

$$(3) \qquad (\theta_t\theta_t) = (\theta_\tau\theta_\tau) \quad \text{und} \quad (\theta_t\theta_\tau) = 0$$

ist.

(**E**) Sind

$$(1) \qquad \mathrm{A}\, dt^2 + 2\,\mathrm{B}\, dtd\tau + \mathrm{C}\, d\tau^2 = 0$$

die Minimallinien auf der Kreisfläche (K), so entsteht

$$(2) \qquad \mathrm{A}\, dt^2 + 2\,\mathrm{B}\, dtd\tau + \mathrm{C}\, d\tau^2 = \alpha\,\{(\theta_t\theta_t)\, dt^2 + 2\,(\theta_t\theta_\tau)\, dtd\tau + (\theta_\tau\theta_\tau)\, d\tau^2\}.$$

Aus (2) folgt

$$(3) \qquad \{\mathrm{A} - \alpha\,(\theta_t\theta_t)\}\, dt^2 + 2\,\{\mathrm{B} - \alpha\,(\theta_t\theta_\tau)\}\, dtd\tau + \{\mathrm{C} - \alpha\,(\theta_\tau\theta_\tau)\}\, d\tau^2 = 0.$$

Gilt (3) von jedem Wert von $dt$, $d\tau$, so muss

$$(4) \qquad \mathrm{A} = \alpha\,(\theta_t\theta_t), \quad \mathrm{B} = \alpha\,(\theta_t\theta_\tau), \quad \mathrm{C} = \alpha\,(\theta_\tau\theta_\tau)$$

sein. Aus (4) und (1) folgt

$$(5) \qquad (\theta_t\theta_t)\, dt^2 + 2\,(\theta_t\theta_\tau)\, dtd\tau + (\theta_\tau\theta_\tau)\, d\tau^2 = 0;$$

daraus kann man sehen, dasz die Minimallinien nicht anders als (5) sind, wo A, B, C und $\alpha$ Funktionen von $t$ und $\tau$ sind.

(**F**) Wir betrachten eine Kreisfläche (K), so kann man setzen[1]

$$(1)\qquad \frac{L}{(\theta_t\theta_t)}\sqrt{(\theta_t\theta_t)}+\frac{N}{\sqrt{(\theta_\tau\theta_\tau)}}\sqrt{(\theta_\tau\theta_\tau)}=0\,,$$

wo $(\theta_t\theta_t)$, $(\theta_t\theta_\tau)$, $(\theta_\tau\theta_\tau)$ unsre Fundamentalgröszen, L, M, N die Grundgröszen zweiter Ordnung im Sinne der gewhönlichen Differentialgeometrie bedeutet.

Sind unsre Punkte auf (K) Nabelpunkte, so muss

$$(2)\qquad \frac{L}{(\theta_t\theta_t)}=\frac{M}{(\theta_t\theta_\tau)}=\frac{N}{(\theta_\tau\theta_\tau)}$$

sein.

Aus (1) und (2) ergibt sich

$$(3)\qquad \sqrt{(\theta_t\theta_t)}+\sqrt{(\theta_\tau\theta_\tau)}=0\,.$$

(3) *ist unsre Bedingung.*

(**G**) Wir betrachten eine Kreisfläche (K), deren Bogenelement $ds$ mit

$$(1)\qquad ds^2=dt^2+2\cos\varphi\, dtd\tau+d\tau^2$$

gegeben ist, wo

$$(2)\qquad (\theta_t\theta_t)=1\,,\quad (\theta_t\theta_\tau)=\cos\varphi$$

gilt.

Aus (1) folgt

$$(3)\qquad \begin{aligned} ds^2=(dt^2+d\tau^2)&(\cos^2\varphi/2+\sin^2\varphi/2)\\ &+2\,dtd\tau\,(\cos^2\varphi/2-\sin^2\varphi/2)\end{aligned}$$

oder

$$(4)\qquad ds^2=d\bar{t}^2\cos^2\varphi/2+d\bar{\tau}^2\sin^2\varphi/2\,.$$

wo

$$(5)\qquad \bar{t}=t+\tau\,,\quad \bar{\tau}=t-\tau$$

gesetzt sind.

(1) THOMAS, H.: Über Flächen, auf denen sich besondere Arten von Netzen geodätischer Linien ausbreiten lassen, Mathematische Zeitschrift Band 44 (1938), S. 235.

Aus (4) kann man sehen, dasz

$$(6) \qquad d\bar{t}^2 \cos^2 \varphi/2 + d\bar{\tau}^2 \sin^2 \varphi/2 = 0$$

die Minimallinien auf (K) sind.

(**H**) Es sei in der Vektorform $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t, \tau)$ die Parameterdarstellung einer MONGEschen Kreisfläche.

Die Parameter seien so gewählt, dasz die Kurven $\tau$=konst. die isotropen Erzeugenden sind. Dann ist

$$(1) \qquad (\theta_t \theta_t) = 0\,;$$

die letztere Gleichung ist an die stets erfüllbare Bedingung geknüpft, dasz $t$ in der Flächendarstellung nur linear vorkommt.

Sind L, M, N die Koeffizienten der zweiten Grundform, so ist $(\theta_t\theta_t)$ =L=0 und die Form lautet:

$$(2) \qquad \begin{cases} ds^2 = \{2(\theta_t\theta_\tau)\,dt + (\theta_\tau\theta_\tau)\,d\tau\}\,d\tau\,, \\ (\mathrm{N}\,d\tau + 2\,\mathrm{M}\,dt)\,d\tau = 0\,. \end{cases}$$

Die Differentialgleichung der Krümmungslinien wird

$$(3) \qquad \{(\theta_\tau\theta_\tau)\,\mathrm{M} - (\theta_t\theta_\tau)\,\mathrm{N}\}\,d\tau^2 = 0\,.$$

Weiter kann man untersuchen wie in DUSCHEKs Arbeit(1).

(**I**) Wir betrachten die Parameterlinien

$$t = \text{const.}, \qquad \tau = \text{const.}$$

auf unsrer Kreisfläche (K).

Die Bogenelemente der Kurven ($t$) und ($\tau$) wollen wir mit $\tau_\tau s$ und $d_t s$ bezeichnen; die angehängten Index $\tau$ bzw. $t$ deuten dabei an, welcher Parameter die Veränderliche ist, dann gilt

$$\frac{d_\tau s}{d_t s} = \frac{k\sqrt{(\theta_\tau\theta_\tau)}}{\sqrt{(\theta_t\theta_t)}}\,,$$

da hat man

(1) DUSCHEK, A.: Über die Krümmungslinien der MONGEschen Flächen, Sitzungsberichten der Akad. der Wiss. in Wien Mathem.-naturw. Klasse, Abteilung II a, 136, Bd. 7. Heft, 1927, S. 408.

$$d\tau : dt = k$$

zu setzen.

Weiter können wir sagen:

**Satz:** Das von unendlich benachbarten Parameterlinien

$$(\tau),\quad (\tau+\varepsilon),\quad (\tau+2\varepsilon),\quad \ldots$$

und

$$(t),\quad (t+\varepsilon),\quad (t+2\varepsilon),\quad \ldots$$

für lim $\varepsilon=0$ gebildete Netz auf (K) hat dann und nur dann lauter gleich grosze Parallelogramme, wenn die Gröszen

$$\sqrt{\{(\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau)-(\theta_t\theta_\tau)^2\}} \quad \text{und} \quad \lambda$$

konstant sind.

Dabei wird vorausgesetzt, dasz die Parameterlinien keine Minimallinien seien. $\lambda$ steht nebenbei bemerkt in meiner frühen Arbeit.[1]

**Satz:** Um alle diejenigen konformen Abbildungen einer Kreisfläche auf einer anderen Kreisfläche zu erhalten, bei denen ein gegebenes Isothermensystem der einen Kreisfläche als ein gegebenes Isothermensystem der anderen abgebildet wird, bestimmt man thermische Parameter $t$, $\tau$ und $\bar{t}$, $\bar{\tau}$ der beiden Systeme und setzt entweder

$$\bar{t} = \pm\, at + \text{konst.},\quad \bar{\tau} = \pm\, a\tau + \text{konst.}$$

oder

$$\bar{t} = \pm\, a\tau + \text{konst.},\quad \bar{\tau} = \pm\, at + \text{konst.}\quad [a=\text{konst}]$$

Dabei können die Vorzeichen nach Belieben genommen werden.[2] Betrachten wir die Spiralkreisflächen (S), so können wir setzen[3]

$$\begin{cases} \lambda = \exp.\, 2t, & (\theta_t\theta_t) = a^2(1+\tau^2)^2, \\ (\theta_t\theta_\tau) = 0, & (\theta_\tau\theta_\tau) = 1\,; \end{cases}$$

---

(1) NAKAZIMA, S.: Kugelgeometrie von MÖBIUS, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. 2 (1929), S. 36.

(2) SCHEFFERS, G.: Einführung in die Theorie der Flächen, Berlin und Leipzig (1922), S. 89.

(3) OGURA, K.: Two surfaces having equal measures of curves, but not deformable into each other, Tôkyo Math. Ges. (2) 4, p. 338.

daraus ergibt sich

$$a^2(1+\tau^2)^2\,dt^2+d\tau^2=0$$

als die Gleichung von Minimallinien auf (S).

(**J**) Es sei eine vollständig geschlossene Kreisfläche gegeben. Es handelt sich darum, die Existenz einer Funktion U des Ortes auf der Kreisfläche anzugeben, die eindeutig und stetig ist, abgesehen von einem singulären Punkte, und der Differentialgleichung

$$\Delta U = C\sqrt{(\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau)-(\theta_t\theta_\tau)^2}\cdot U$$

genügt.

Darin bedeutet C eine wesentlich positive Funktion des Ortes auf der Kreisfläche, $\Delta U$ den BELTRAMIschen Differentialparameter zweiter Ordnung.

Man kann die Existenz von U mittels einer Fredholmschen Intergalgleichung nach[1] weisen.

Da bedeutet $\lambda$ eine wesentlich positive Funktion des Ortes auf der Kreisfläche. Das $\lambda$ steht in meiner Arbeit[2].

(**K**) Eine Projektion heiszt nach A. VENTURI „*merisogon*", wenn die durch dieselbe bewirkte Veränderung eines Winkels nur von der Grösze und von Orientierung dieses Winkels abhängig ist. Sind

$$\begin{cases} ds^2 = 1/\lambda\cdot\{(\theta_t\theta_t)\,dt^2+(\theta_\tau\theta_\tau)\,d\tau^2\},\\ ds'^2 = 1/\lambda'\cdot\{(\theta_t\theta_t)'\,dt'^2+(\theta_\tau\theta_\tau)'\,d\tau'^2\}\end{cases}$$

die auf rechtwinklige krummlinige Koordinaten bezogenen Linienelemente der krummen Kreisfläche S, S' und setzt man

$$\begin{cases} 1/\lambda_1\cdot(\theta_t\theta_t)_1 = 1/\lambda'\cdot\{(\theta_t\theta_t)'(\partial t'/\partial t)^2+(\theta_\tau\theta_\tau)'(\partial\tau'/dt)^2\},\\ 1/\lambda_1\cdot(\theta_t\theta_\tau)=1/\lambda'\cdot\{(\theta_t\theta_t)'\cdot\partial t'/\partial t\cdot\partial t'/\partial\tau+(\theta_\tau\theta_\tau)'\cdot\partial\tau'/\partial t\cdot\theta\tau'/\partial\tau\},\\ 1/\lambda_1\cdot(\theta_\tau\theta_\tau) = 1/\lambda'\cdot\{(\theta_t\theta_t)'(\partial t'/\partial\tau)^2+(\theta_\tau\theta_\tau)'(\partial\tau'/\partial\tau)^2\},\end{cases}$$

(1) PICARD, E.: Sur une équation aux dérivées partielles relative à une surface fermée, Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Academie des Sciences, Paris, 146, p. 1231–1235.

(2) NAKAZIMA, S.: Kugelgeo. von MÖBIUS, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. 2 (1929), S. 36.

so ist die Bedingung dafür, dasz die Projektion von $s$ auf $s'$ merisogen ist:

$$2\frac{\sqrt{(\theta_t\theta_t)_1(\theta_\tau\theta_\tau)_1-(\theta_t\theta_\tau)_1^2}}{(\theta_\tau\theta_\tau)_1\sqrt{(\theta_t\theta_t)/(\theta_\tau\theta_\tau)}+(\theta_t\theta_t)_1\sqrt{(\theta_\tau\theta_\tau)/(\theta_t\theta_t)}}=\text{const.};$$

die rechtsstehende Konstante ist die grosze Projektion[1] eines rechten Winkels von S auf S′.

(**L**) Nach WEINGARTEN hat man eine aus den Minimalkreisflächen (**M**) durch Quadraturen bestimmbare Klasse aufeinander abwickelbarer Kreisflächen von Linienelmentquardrat

$$(1)\qquad ds^2=2\tau dt^2+2t\,dt d\tau+d\tau^2$$

angegeben.

Da besteht

$$(2)\qquad (\theta_t\theta_t)=2\tau,\quad (\theta_t\theta_\tau)=t,\quad (\theta_\tau\theta_\tau)=1.$$

Aus (1) kann man die folgenden Sätze für (**M**) beweisen.

**Satz 1:** *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dasz die beiden Scharen von Parameterkurven sich allenthalben orthogonal schneiden, ist, dasz die Gleichung*

$$(\theta_t\theta_\tau)=0,\quad \textit{oder}\quad t=0$$

*identisch für alle Wertepaare $t$, $\tau$ erfüllt ist.*

**Satz 2:** *Ist nämlich $\varphi$ der Winkel, den eine beliebige Fortschreitungsrichtung $dt:d\tau$ mit der Krümmungslinie $\tau=$const. einschlieszt, so ist*

$$\tan\varphi=\frac{d\tau}{\sqrt{2\tau}\,dt}$$

*da $t=0$ ist.*

**Satz 3:** *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dasz die Parametrekurven Minimallinien sind, ist, dasz die Gleichungen*

(1) SOLER, E.: Sulle proiezioni merisogone, Atti della R. Accademia Peloritana, Messina, 21, p 65-105.

$$\tau = 0 , \qquad (\theta_\tau \theta_\tau) = 0$$

*identisch für alle Wertepaare t, τ erfüllt sind.*

*Aber ergibt dies sich nicht.*

**Satz 4:** *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dasz die Parameterkurven isometrische Linien sind, ist, dasz für alle Wertepaare t, τ die Gleichungen*

$$t = 0$$

*bestehen.*

*Sind auszerdem t und τ thermische Parameter, so ist*

$$\tau = 1 .$$

**Satz 5:** *Wir bezeichnen nun mit ϑ den Winkel, den die geodätischen Linien des angenommenen parallelen Systems mii den Kurven* $\tau=$const. *bilden, indem wir ihn nach den Grundformeln von Differentialgeometrie durch die Gleichung*

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sqrt{2\tau - t^2}\, d\tau}{2\, \tau dt + t d\tau}$$

*definieren, wo dt, dτ die Zunahmen der krummlinigen Koordinaten t, τ längs einer der geodätischen Parallelen sind.*

*Ist die Funktion ϑ (t, τ) bekannt, so ergibt sich die Gleichung dieser geodätischen Linien in endlicher Gestalt durch Integration der Differentialgleichung*

$$2t \sin \vartheta dt + \{t \sin \vartheta - \sqrt{2\tau - t^2} \cos \vartheta\}\, d\tau = 0 ,$$

*was nach dem* LIE*schen Satze mittels Quadraturen möglich ist.*

*Ebenso läszt sich mittels Quadraturen die Differentialgleichung der orthogonalen Grenzkreise*

$$2\, \tau \cos \vartheta\, dt + \{t \cos \vartheta + \sqrt{2\tau - t^2} \sin \vartheta\}\, d\tau = 0$$

*integrieren.*

**Satz 6:** *Durch die Gleichung*

$$\mathrm{A}\, dt^2 + 2\, \mathrm{B}\, dt d\tau + \mathrm{C}\, d\tau^2 = 0$$

*werden auf jeder Kreisfläche* (K) *zwei Tangenten bestimmt; ist nun*

$$2\tau C - 2t B + A = 0,$$

*so sind diese Tangenten auf* (K) *orthogonal; dann musz also wegen der winkeltreuen Abbildung auch*

$$2\tau_1 C - 2t_1 B + A = 0$$

*sein, wo* $2\tau_1$, $t_1$, 1 *unsre Fundamentalgröszen für andere Kreisfläche* ($M_1$) *sind.*

**Satz 7:** *Die Bedingung der Konformität von beiden Kreisflächen* (M) *und* ($M_1$) *ist*

$$\pi : t : 1 = \tau_1 : t_1 : 1.$$

**Satz 8:** (M) *und* ($M_1$) *seien zwei konvexe Kreisflächen, deren Punkte eineindeutig durch parallele und gleichgerichtete Flächennormalen einander zugeordnet sein.*

*Für jede Wahl von gemeinsamen Flächenparametern sei*

$$\tau = \tau_1, \qquad t = t_1.$$

*Dann sind die beiden Flächen bis auf die Translation miteinander identisch.*[1]

**Satz 9:** *Der Differentialparameter erster Ordnung einer Funktion* $\varphi(t, \tau)$ *von* (M) *wird definiert durch*

$$\Delta_1(\varphi) = \frac{1}{2\tau - t^2}\left\{2t\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)^2 - 2t\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2\right\},$$

u. s. w..

Weiter kann man wissen, dasz, das Problem, eine Kreisfläche mit einem Netz äquidistanter Kurven zu bekleiden, heiszt, das Quadrat des Linienelements der Kreisfläche auf die Form

$$ds^2 = dt^2 + 2\cos\alpha\, dt d\tau + d\tau^2$$

zurückzuführen.[2] In diesem Falle besteht

---

(1) NAKAZIMA, S.: Über die ersten Fundamentalgröszen bei Eiflächen, Jap. Journ. of Math. Vol. 4 (1927), S. 101.

(2) ROTHE, R.: Über die Bekleidung einer Oberfläche mit einem biegsamen unausdehnbaren Netz, Sitzungsberichte der Berliner Math. Gesellschaft, VII (1907), S. 10.

$$2\tau = 1, \quad t = \cos\alpha.$$

Setzt man das Linienelement in der Form

$$ds^2 = 2\tau\, dt^2 + d\tau^2, \quad (t = 0),$$

an, so wird die geodätische Krummung einer Kurve

$$\tau = \text{const.}$$

durch den Ausdruck

$$\rho_g^{-1} = -1/2\tau$$

dargestellt[1].

(**M**) Lässt sich eine Kroisfläche durch die Kurven

$$(1) \qquad \alpha = \text{const.}$$

und deren orthogonale Trajektorien

$$(2) \qquad \beta = \text{const.}$$

in unendlich kleine Quadrate teilen, so gilt

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left\{\dfrac{(\theta_\tau\theta_\tau)\cdot\partial\alpha/\partial t - (\theta_t\theta_\tau)\cdot\partial\alpha/\partial\tau}{\sqrt{(\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau)-(\theta_t\theta_\tau)^2}}\right\} \\ \qquad + \dfrac{\partial}{\partial\tau}\left\{\dfrac{(\theta_t\theta_t):\partial\alpha/\partial\tau - (\theta_t\theta_\tau)\cdot\partial\alpha/\partial t}{\sqrt{(\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau)-(\theta_t\theta_\tau)^2}}\right\} = 0. \end{cases}$$

Für den Fall, dasz[2]

$$(4) \qquad (\theta_t\theta_\tau) = 0$$

ist, wandelt sich die Gleichung (3) um in

$$(5) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left\{\sqrt{\frac{(\theta_\tau\theta_\tau)}{(\theta_t\theta_t)}}\,\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\} + \frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\sqrt{\frac{(\theta_t\theta_t)}{(\theta_\tau\theta_\tau)}}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial\tau}\right\} = 0.$$

(**N**) Nach einem Satze von MASSIEU ist notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Kreisfläche auf eine Umdre-

(1) TAKASU, T.: Differentialgeo. in den Kugelräumen, Bd. I, S. 249.

(2) WILLGROD, H.: Über Flächen, welche sich durch ihre Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate teilen lassen, Inaugual-Dissertation zur Erlangung der philosophischen Doctorwürde an der GEORG-AUGUSTS-Universität zu Göttingen. 1883, S. 7.

hungskreisfläche abwickelbar sei, die, dass die Differentialgleichung der Kürzesten ein lineares und homogenes Integral zulasse.

Das Linienelement $ds$ einer Gesimskreisfläche genügt der Gleichung

$$(1)\qquad \begin{cases} ds^2 = (T - \mathrm{T})^2\, dt^2 + d\tau^2. \quad da\,(\theta_t\theta_\tau) = 0\,, \\ (\theta_t\theta_t) = T - \mathrm{T}\,, \quad (\theta_\tau\theta_\tau) = 1\,. \end{cases}$$

Es müssen also, um obige Bedingung zu erfüllen, eine Funktion C von $\tau$ und $t$ und eine Funktion W′ von $t$ allein existieren, so dass

$$(2)\qquad \mathrm{W}'T + \partial/\partial t\cdot(T - \mathrm{T}) = 0\,,$$

$$(3)\qquad \mathrm{W}'' + (T - \mathrm{T}^2\, \mathrm{C}'_\tau = 0\,,$$

wo $T$ eine Funktion von $\tau$ allein, T eine Funktion von $t$ allein ist[1].

In diesem Falle ist die Gleichung der Minimallinien

$$(4)\qquad (T - \mathrm{T})^2\, dt^2 + d\tau^2 = 0\,.$$

Besteht (1), so ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die Möglichkeit, $ds^2$ in die harmonische Form zu bringen, ausgedrückt durch zwei Gleichungen für $\mu$, welche bei passend gewählter Form der Funktionen A und W von sind[2]:

$$(5)\qquad \frac{\partial\mu}{\partial t} = (T - T)^2\left(\mathrm{W} + \mathrm{A}'\int\frac{d\tau}{(\tau - \mathrm{T})^2}\right),$$

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\tau}{\partial\tau}\left[\dfrac{1}{(T-\mathrm{T})^2}\left(\dfrac{\partial\mu}{\partial\tau} - 3\,\mathrm{A}\right)\right] \\ \qquad = \dfrac{2}{(T-T^3)}\dfrac{\partial}{\partial t}\left[(T-\mathrm{T})\left(\mathrm{W}+\mathrm{A}'\displaystyle\int\frac{d\tau}{(T-\mathrm{T})^2}\right)\right]. \end{cases}$$

Aus (1) kann man sehen, dasz die Differentialgleichung aller geodätischen Kurven der Kreisfläche die Form annimmt:

$$(7)\qquad (T-\mathrm{T})^2(\tau' t'' - t'\tau'') + \{[(T-\mathrm{T})^2]_\tau\, \tau'^2 + \tfrac{1}{2}[(T-\mathrm{T})^2]_t\, \tau' t' + \tfrac{1}{2}(T-\mathrm{T})^2\,[(T-\mathrm{T})^2]_\tau\, t'^2\}\, t' = 0\,,$$

(1) RAFFY, L.: Détermination de toutes les surfaces moulures applicables sur des surfaces de rèvolution, Bulletin de la Société Mathématique de France publié par les secrétaires, Paris, XIX, p. 34-37.

(2) RAFFY, L.: Recherches sur les surfaces harmoniques. Résumé, Bulletin de la Société Mathématique de France publié par les secrétaires, Paris, XXII, 63-66, 84-96.

Dabei sind $\tau$ und $t$ als Funktionen eines dritten Parameters $\sigma$ zu betrachten.

Sieht man von den geodätischen Parameterlinien ($t$) ab, längs deren ja $t$ konstant ist, so kann man $t$ selbst als Parameter $\tau$ benutzen.

Dann wird $t'=1$ und $t''=0$, während $\tau'$ und $\tau''$ die Ableitungen erster und zweiter Ordnung von $\tau$ nach $t$ sind.

Infolgedessen wird aus (7):

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\tau}{dt^2} = \dfrac{[(T'-T)^2]_\tau}{(T'-T)^2}\left(\dfrac{d\tau}{dt}\right)^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{[(T'-T)^2]_t}{(T'-T)^2}\dfrac{d\tau}{dt} \\ \qquad + \dfrac{1}{2}[(T'-T)^2]_\tau . \end{cases}$$

(**O**) Wenn eine Translationskreisfläche gleichzeitig Minimalkreisfläche ist, so lautet

$$(1)\quad (\theta_t\theta_t)\,D'' + (\theta_\tau\theta_\tau)\,D = 0$$

oder

$$(2)\quad (\theta_t\theta_t) : D = (\theta_\tau\theta_\tau) : -\,D''$$

wo $(\theta_t\theta_\tau)=0$ gesetzt ist. Da D, D′, D″ zweite Fundamentalgröszen im Sinne der gewöhnlichen Differentialgeometrie sind[1].

Ist unser Punkt Nabelpunkt, so gilt

$$(3)\quad (\theta_t\theta_t) : D = (\theta_\tau\theta_\tau) : D'' ;$$

daher folgt aus (2) und (3)

$$(4)\quad (\theta_t\theta_t) = (\theta_\tau\theta_\tau) = 0 .$$

(**P**) Nach ROTHE[2] kann man wissen, dasz das Quadrat des Linienelements einer beliebigen Kreisfläche stets in die Form

$$(1)\quad ds^2 = \lambda^2\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 dt^2 + 2\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\cos\omega\; dt d\tau + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)^2 d\tau^2\right]$$

zu bringen ist, wobei die Kurven

---

(1) STÄCKEL, P.: Die kinematische Erzeugung von Minimalflächen, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 7, p. 293-313.

(2) ROTHE, S.: Bemerkungen über die Gewebe („Kurvennetze ohne Umwege“( auf einer Fläche, Deutsche Math.-Ver. 17, S. 325.

( 2 ) $\varphi = \text{const.}$

den Winkel $\tau - \omega$ halbieren.

Aus (1) entsteht

$$( 3 ) \quad \frac{(\partial\varphi/\partial t)^2}{(\theta_t\theta_t)} = \frac{\partial\varphi/\partial t \cdot \partial\varphi/\partial\tau}{(\theta_t\theta_\tau)} = \frac{(\partial\varphi/\partial\tau)^2}{(\theta_\tau\theta_\tau)} .$$

(**Q**) Ist $\lambda$ in meiner Arbeit[1] gleich

$$( 1 ) \quad dt^2 + d\tau^2 ,$$

so folgt

$$( 2 ) \quad ds^2 = \{(\theta_t\theta_t)\, dt^2 + 2\,(\theta_t\theta_\tau)\, dt d\tau + (\theta_\tau\theta_\tau)\, d\tau^2\} : \{dt^2 + d\tau^2\}.$$

Besteht (2) für alle Werte von $(t, \tau)$, so soll das Verhältnis

$$( 3 ) \quad \{(\theta_t\theta_t)\, dt^2 + 2\,(\theta_t\theta_\tau)\, dt d\tau + (\theta_\tau\theta_\tau)\, d\tau^2\} : \{dt^2 + d\tau^2\}$$

für alle vom Punkte $(t, \tau)$ ausgehende Fortschreitungsrichtung $(k)$ oder $(d\tau : dt)$ dasselbe sein, d. h. der Bruch

$$( 4 ) \quad \{(\theta_t\theta_t) + 2\,(\theta_t\theta_\tau)\, k + (\theta_\tau\theta_\tau)\, k^2\} : \{1 + k^2\}$$

soll von $k$ unabhängig sein.

Dies aber ist dann und nur dann der Fall, wenn

$$( 5 ) \quad (\theta_t\theta_t) = (\theta_\tau\theta_\tau) = 1 \quad \text{und} \quad (\theta_t\theta_\tau) = 0$$

ist; daraus ergibt sich

$$( 6 ) \quad ds^2 = (\theta_t\theta_t) = (\theta_\tau\theta_\tau) = 1 .$$

(**R**) FULER und MEUNIER haben die Krümmungstheorie für die Normalschnitte einer Oberfläche begründet.

Entsprechende Relationen stellt BURGATTI für die geodätische Torsion der von einem Punkte einer Oberfläche ausgehenden Linien auf[2].

Im besonderen findet er die Formel

(1) NAKAZIMA, S.: Kugelgeo. von MÖBIUS, Mem. of the Fac. Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. 2 (1929), S. 36.

(2) BURGATTI, P.: Sulla torsione geodetica delle linee tracciate sopra una superficie, Palermo Rend. 10, p. 229.

$$(1) \qquad \frac{1}{T} = \frac{\cos^2\theta}{T_1} + \frac{\sin^2\theta}{T_2},$$

welche der EULERschen Formel für den Normalschnitt vollständig analog gebaut ist.

Dabei bedeuten $T_1$, $T_2$ die geodätischen Krümmungen zwei orthogonalen und in Bezug auf den Hauptschnitt konjugierter Linien $u=$const., $v=$const.:

$$(2) \qquad \frac{1}{T_1} = \frac{FD - ED'}{E\sqrt{EG-F^2}}, \quad \frac{1}{T_2} = \frac{GD' - FD''}{G\sqrt{EG-F^2}}.$$

In der Kreisfläche folgt aus (2)

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{T_1} = \dfrac{(\theta_t\theta_\tau)D - (\theta_t\theta_t)D'}{(\theta_t\theta_t)\sqrt{(\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau) - (\theta_t\theta_\tau)^2}}, \\[2ex] \dfrac{1}{T_2} = \dfrac{(\theta_\tau\theta_\tau)D' - (\theta_t\theta_\tau)D''}{(\theta_\tau\theta_\tau)\sqrt{(\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau) - (\theta_t\theta_\tau)^2}}. \end{cases}$$

(S) Im folgenden möchten wir die Kreisflächen (K) untersuchen, deren Linienelement durch die Gleichung

$$(1) \qquad \begin{cases} ds^2 = dt^2 + d\tau^2 + 2\varphi(t)\psi(\tau)\,dtd\tau, \\ (\theta_t\theta_t) = 1, \quad (\theta_t\theta_\tau) = \varphi(t)\psi(\tau), \quad (\varphi_\tau\theta_\tau) = 1 \end{cases}$$

gegeben ist und bei denen die Kurven

$$(2) \qquad t = \text{const.}, \quad \tau = \text{const.}$$

das System der Diagonallinien bilden[1].

Aus (1) kann man die folgenden Sätze über (K) beweisen.

(1) *Die Minimallinien auf* (K) *sind*

$$dt^2 + d\tau^2 + 2\varphi(t)\psi(\tau)\,dtd\tau = 0.$$

(2) *Wenn*

$$\alpha(t,\tau)\,dt + \beta(t,\tau)\,d\tau = 0$$

*die Differentialgleichung einer einfach unendlichen Schar von geodä-*

(1) VELISEK, FR.: Über eine Art der Translationsflächen, Casopis 44, p. 194–198 (1916), (Böhmisch).

*tischen Kurven auf* (K) *mit den Parametern t und* $\tau$, *diese geodätischen Kurven aber keine Minimallinien sind, so stellt*

$$d\lambda = \frac{\{\beta - \varphi(t)\psi(\tau)\alpha\}\,dt + \{\varphi(t)\psi(\tau)\beta - \alpha\}\,d\tau}{\sqrt{\beta^2 - 2\varphi(t)\psi(\tau)\beta\alpha + \alpha^2}}$$

*das vollständige Differential einer Funktion* $\lambda$ *von t und* $\tau$ *dar, und die Gleichung*

$$\lambda(t, \tau) = \text{const.}$$

*ist die der orthogonalen Trajektorien jener Schar von geodätischen Kurven*[2].

(3) *Ein Kurvennetz*

$$\mathrm{A}(t, \tau)\,dt^2 + 2\,\mathrm{B}(t, \tau)\,dtd\tau + \mathrm{C}(t, \tau)\,d\tau^2 = 0$$

*auf* (K) *ist dann und nur dann ein Orthogonalsystem, wenn*

$$\mathrm{C} - 2\varphi(t)\psi(\tau)\mathrm{B} + \mathrm{A} = 0$$

*ist.*

(4) *Die Parameterlinien auf* (K) *bilden ein Kurvennetz ohne Umwege.*

(5) *In der Integralrechnung wird gelehrt, wie man den Flächeninhalt* J *eines Teiles einer in Parameterdarstellung gegebenen Kreisfläche zu berechnen hat: Handelt es sich um den Inhalt der Kreisfläche, die von einer geschlossenen Linie* 1 *begrenzt wird, so hat man das Integral zu berechnen:*

$$\mathrm{J} = \int_l d\,\mathrm{J}$$

*erstreckt sich über das Innere der Linie* 1. *Dabei bedeutet* $d\,\mathrm{J}$ *das Kreisflächendifferential, wo*

$$d\,\mathrm{J} = dtd\tau\,.$$

(6) *Definiert die Differentialgleichung*

$$d\tau/dt = \lambda(t, \tau)$$

(2) SCHEFFERS, G.: Einführung in die Theorie der Flächen, Berlin und Leipzig, 1922, S. 503.

*auf* (K) *keine Schar von Minimalkurven, so lautet die Differentialgleichung der Kurven, die auf die durch diese Gleichung definierten einfach unendlich vielen Kurven senkrecht sind:*

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{1+\varphi(t)\psi(\tau)\lambda}{\varphi(t)\psi(\tau)\lambda+\lambda}.$$

(7) *Dafür, dasz sich die Parameterlinien* $(t)$ *und* $(\tau)$ *eine* (K) *zu einem Isothermennetze anordnen lassen, in dem* $(t)$ *bzw.* $(\tau)$ *von Kurve zu Kurve um dieselbe unendlich kleine Grösze wachsen, ist notwendig und hinreichend, dasz die zugehörigen unsrer Fundamentalgröszen die Bedingungen*

$$\varphi(t)\psi(\tau) = 0$$

*erfüllen.*

Nun setzen wir (1) in die Form

$$(3) \qquad ds^2 = G_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k.$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dasz

$$C: \quad u^i = f^i(t), \qquad [i=1,2]$$

die Extremale ist, besteht darin, dasz die sogenannten Eulerschen Gleichungen

$$(4) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{u}^i}\right) - \frac{\partial\varphi}{\partial u^i} = 0$$

bestehen.

Wir wollen dieses Ergebnis auf

$$(5) \qquad s = \int_{t_0}^{t_1}\sqrt{G_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k}\,dt$$

anwenden, so ergibt sich[3]

$$(6) \qquad \frac{d^2u^l}{ds^2} + \left\{ {l \atop jk} \right\} \frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds} = 0.$$

(3) Vgl. TAKASU, T.: Differentialgeo. in den Kugelräumen, Bd. I (1938), S. 233.

(T) Wenn die Kreisfläche auf ein senkrechtes geodätisches Koordinatensystem bezogen ist, so wird das Linienelement in der Form

$$(1) \qquad ds^2 = (\theta_t\theta_t)\,dt^2 + \theta\tau^2$$

Nach (1) kann man beweisen den folgenden

**Satz 1:** *Die Kreisflächen, anf denen*

$$(\theta_t\theta_t)$$

*überall verschwindet, sind die Tangentenflächen von Miniamlkurven, die nicht-zylindrischen Kegel von Minimalgeraden und die Minimalebenen.*

**Satz 2:** *Die Gleichungen der Minimallinien auf unserer Kreisfläche sind*

$$(\theta_t\theta_t)\,dt^2 + d\tau^2 = 0\,.$$

**Satz 3:** *Ein Kurvennetz*

$$\mathrm{A}(t,\tau)\,dt^2 + 2\,\mathrm{B}(t,\tau)\,dtd\tau + \mathrm{C}(t,\tau)\,d\tau^2 = 0$$

*auf einer Kreisfläche ist dann und nur dann ein Orthogonalsystem, wenn*

$$(\theta_t\theta_t)\mathrm{C} + \mathrm{A} = 0$$

*ist.*

**Satz 4:** *Definiert die Differentialgleichung*

$$d\tau/dt = \lambda(t,\tau)$$

*auf einer Kreisfläche keine Schar von Minimalkurven, so lautet die Differentialgleichung der Kurven, die auf die durch diese Gleichung definierten einfach unendlich vielen Kurven senkrecht sind:*

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{(\theta_t\theta_t)}{\lambda}\,.$$

**Satz 5:** *Die Parameterlinien einer Kreisfläche bilden dann und nur dann ein Kurvennetz ohne Umwege, wenn die Fundamentalgrössen $(\theta_t\theta_t)$ in der Form*

$$\frac{\partial \sqrt{(\theta_t\theta_t)}}{\partial\tau} = 0$$

*gegebenen Bedingungen genügen und nicht verschwinden.*

**Satz 6:** *Damit sich die Parameterlinien* $(t)$ *und* $(\tau)$ *einer Kreisfläche so anordnen lassen, dasz sie ein Netz von unendlich kleinen Quadraten bilden, ist notwendig und hinreichend, dasz unsere Fundamentalgrössen* $(\theta_t\theta_t)$ *die Bedingung*

$$\alpha^2(t)(\theta_t\theta_t) - \beta^2(\tau) = 0$$

*erfüllen. Hier bedeutet* $\alpha$ *eine von Null verschiedene Funktion von* $t$ *allein und* $\beta$ *eine von Null verschiedene Funktion von* $\tau$ *allein.*

u. s. w..

(U) Im folgenden möchten wir die folgenden Probleme betrachten: *Kann man eine Kreisfläche mit einem Netz von vollkommen biegbaren und undehnbaren Fäden überspannen, das so deformiert werden kann, dasz die Schnittpunkte der Fäden auf den Fäden fest bleiben und nur die Schnittwinkel veränderlich sind?*

Das allgemeine Problem bedeutet, ein Koordinatensystem $t$, $\tau$ auf der Kreisfläche so zu bestimmen, dasz die Minimallinien die folgende Gestalt erhält(1):

$$(1)\qquad \begin{cases} dt^2 + 2\,e^{\varphi-\psi}\cos\omega\, dt d\tau + e^{2(\varphi-\psi)}\, d\tau^2 = 0\,, \\ \{\cos\omega = (\theta_t\theta_\tau) : \sqrt{(\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau)}\,, \\ \qquad e^{\varphi-\psi} = (\theta_t\theta_\tau) : (\theta_t\theta_t)\cos\omega\}\,, \end{cases}$$

wo $\omega$ der Winkel zwischen den Koordinatenlinien, $\varphi$, $\psi$ beliebige Funktionen von $t$ und $\tau$ sind, denn

$$\frac{(\theta_t\theta_t)}{e^{2\psi}} = \frac{(\theta_t\theta_\tau)}{e^{\varphi+\psi}\cos\omega} = \frac{(\theta_\tau\theta_\tau)}{e^{2\varphi}}$$

gilt.

Nach (1) kann man beweisen den folgenden

**Satz 1:** *Die Gleichungen der Minimallinien auf unserer Kreisfläche sind*

$$dt^2 + 2\,e^{\varphi-\psi}\cos\omega\, dt d\tau + e^{2(\varphi-\psi)}\, d\tau^2 = 0\,.$$

---

(1) MYLLER, A.: L'habillage des surfaces, Annales scient. Univ. Jassy 14, 163–168.

**Satz 2:** *Die Tangenten der Minimallinien in einem Kreisflächenpunkt* $(t, \tau)$ *sind dann und nur dann Minimalgeraden, wenn für diesen Punkt*

$$e^{2(\varphi-\phi)}$$

*verschwinden.*

**Satz 3:** *Die Kreisflächen, auf denen*

$$e^{2(\varphi-\phi)} - e^{2(\varphi-\phi)}\cos^2\omega$$

*überall verschwindet, sind die Tangentenflächen von Minimalkurven, die nich-zylindrischen Kegel von Minimalgeraden und die Mtnimalebenen.*

**Satz 4:** *Von den Tangenten eines Kreisflächenpunktes* $(t, \tau)$ *sind zwei und nur zwei Minimalgeraden.*

*Die zu ihnen gehörigen Fortschreitungsrichtungen* $(d\tau : dt)$ *werden durch die Gleichung*

$$dt^2 + 2\,e^{\varphi-\phi}\cos\omega\, dt d\tau + e^{2(\varphi-\phi)}\,d\tau^2 = 0$$

*bestimmt. Die beiden Minimalgeraden fallen nicht zusammen. Dagegen kommt einem Miuimalpunkte der Kreisfläche nur eine solche Tangente zu, die Minimalgerade ist.* u. s. w..

(**V**) Wenn in allgemeinster Weise Kreispunkte $\mathfrak{x}$ als Funktionen von $t$ und $\tau$ derart bestimmt werden, dasz die Parameterkurven auf der Kreisfläche des Punktes $\mathfrak{x}$ ein konjugiertes System mit gleichen Invarianten bilden, das durch eine LAPLACEsche Transformation in ein orthogonales System übergeht.

Ein solches konjugiertes System gibt dem Quadrate des Linienelements eie Form[1]

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} ds^2 = \left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)^2 dt^2 + 2\left\{\Omega\,\frac{\partial^2\Omega}{\partial t\partial\tau} - \frac{\partial\Omega}{\partial t}\,\frac{\partial\Omega}{\partial\tau}\right\} dt d\tau \\ + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\tau}\right)^2 d\tau^2, \end{aligned}\right.$$

(1) CALAPSO, P.: Intorno ai sistemi coniugati che col metodo di Laplace si trasformano da entrambi i lati in sistemi ortogonali, Palermo Rend. **31**, S. 273.

$$(2)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial\Omega}{\partial t}\right)^2 : \left(\dfrac{\partial\Omega}{\partial\tau}\right)^2 = (\theta_t\theta_t), \\ \left\{\Omega\,\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial t\,\partial\tau} - \dfrac{\partial\Omega}{\partial t}\,\dfrac{\partial\Omega}{\partial\tau}\right\} : \left(\dfrac{\partial\Omega}{\partial\tau}\right)^2 = (\theta_t\theta_\tau), \end{cases}$$

wo $\Omega$ eine Funktion von $t$ und $\tau$ ist, denn

$$(3)\quad \frac{(\partial\Omega/\partial t)^2}{(\theta_t\theta_t)} = \frac{\{\Omega\cdot\partial^2\Omega/\partial t\partial\tau - \partial\Omega/\partial t\cdot\partial\Omega/\partial\tau\}}{(\theta_t\theta_\tau)} = \frac{(\partial\Omega/\partial\tau)^2}{1}$$

gilt.

Aus (2) kann man eine Relation zwischen $)\theta_t\theta_t)$ und $(\theta_t\theta_\tau)$ finden.

(W) Wir betrachten die Kurven auf einer Kreisfläche, welche mit den Kurven, die den Winkel zwischen den Krümmungslinien halbieren, immer den gleichen Winkel bilden.

Wird ein Netz von solchen Kurven als Koordinatennetz auf einer Kreisfläche gewählt, so besteht als notwendig und hinreichend zwischen den sechs unserer Fundamentalgröszen die Relation

$$(1)\quad \begin{aligned} &(\theta_t\theta_\tau)(\overline{\theta_\tau\theta_\tau})(\theta_t\theta_t) - 2(\overline{\theta_t\theta_t})(\theta_\tau\theta_\tau)(\theta_t\theta_\tau) \\ &+ (\theta_t\theta_t)(\overline{\theta_t\theta_\tau})(\theta_\tau\theta_\tau) = 0, \end{aligned}$$

wo $(\overline{\theta_t\theta_t})$, $(\overline{\theta_t\theta_\tau})$, $(\overline{\theta_\tau\theta_\tau})$ unsere Fundamentalgröszen der Gauszschen Kugel bedeuten[1].

Aus (1) entsteht

$$(2)\quad (\theta_t\theta_\tau)(\overline{\theta_t\theta_t}) - 2(\theta_t\theta_t)(\overline{\theta_t\theta_\tau}) + (\theta_t\theta_t)(\theta_t\theta_\tau) = 0,$$

denn

$$(3)\quad (\theta_\tau\theta_\tau) = 1$$

gilt.

Weiter gilt

$$(4)\quad (\theta_t\theta_\tau)(\overline{\theta_t\theta_t}) - 2(\overline{\theta_t\theta_\tau}) + (\theta_t\theta_\tau) = 0,$$

wenn unsere Kreisfläche mit einem Netz äquidistanter Kurven zu be-

(1) OCCHIPINTI, R.: Linee isocline rispetto alle bisettrici delle linee di curvatura, Palermo Rend. 36, p. 29.

kleiden ist[1], denn

$$(5)\qquad (\theta_t\theta_t) = (\theta_\tau\theta_\tau) = 1$$

gilt.

(X) Wir betrachten die Kreisflächen mit dem Linienelement

$$(1)\quad ds^2 = dt^2 + 2\,t\tau\; dtd\tau + d\tau^2\,,$$

wo

$$(2)\qquad (\theta_t\theta_t) = 1\,,\quad (\theta_t\theta_\tau) = t\tau\,,\quad (\theta_\tau\theta_\tau) = 1$$

gelten[2].

Nach (1) kann man die folgenden Sätze beweisen.

**Satz 1:** *Die Gleichung von Minimallinien auf unserer Kreisfläche ist*

$$dt^2 + 2\,t\tau\; dtd\tau + d\tau^2 = 0\,.$$

**Satz 2:** *Ein Kurvennetz*

$$\mathrm{A}(t,\tau)\,dt^2 + 2\,\mathrm{B}(t,\tau)\,dtd\tau + \mathrm{C}(t,\tau)\,d\tau^2 = 0$$

*auf einer Kreisfläche ist dann und nur dann ein Orthogonalsystem, wenn*

$$\mathrm{C} - 2\,t\tau\,\mathrm{B} + \mathrm{A} = 0$$

*ist.*

**Satz 3:** *Definiert die Differentialgleichung*

$$d\tau/dt = \lambda\,(t,\tau)$$

*auf einer Kreisfläche keine Schar von Minimallinien, so lautet die Differentialgleichung der Kurven, die auf die durch diese Gleichung definierten einfach unendlich vielen Kurven senkrecht sind:*

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{1 + t\cdot\tau\lambda}{t\cdot\tau + \lambda}\,.$$

(1) ROTHE, K.: Über die Bekleidung einer Oberfläche mit einem biegsamen unausdehnbaren Netz, Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesehlschaft (1905), S. 9.

(2) TZITZÉICA, G.: Ein Problem der infinitesimalen Geometrie, Bul. Soc. de Stunte, Bukarest 18, p. 166 (Rumänisch).

**Satz 4:** *Die Parameterlinien einer Kreisfläche bilden ein Kurvennetz ohne Umwege.*

**Satz 5:** *Ist* $t=0$ *oder* $\tau=0$,
*so sind* $t=\text{const.}$ *und* $\tau=\text{const.}$
*zueinander orthogonal.*

**Satz 6:** *Die Tangenten der beiden Parameterlinien in einem Kreisflächenpunkte* $(t, \tau)$ *sind Minimalgeraden.*

**Satz 7:** *Der Inhalt* J *der Kreisfläche ist zu berechnen mit*

$$d\,\mathrm{J} = \sqrt{1-t^2\tau^2}\,dt d\tau\,.$$

**Satz 8:** *Die Bogenelemente der Kurven* $(\tau)$ *und* $(t)$ *wollen wir mit* $d_t s$ *und* $d_\tau s$ *bezeichnen, so folgt*

$$d_t s = dt\,,\quad d_\tau s = d\tau\,.$$

**Satz 9:** *Zwei Kreisflächen* K *und* $\mathrm{K}_1$ *sind dann und nur dann konform, wenn*

$$t\tau = t_1\tau_1$$

*gilt.*

**Satz 10:** *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, davz die eine Schar von Parameterkurven* ($\tau=$const.) *von geodätischen Linien und die andere* ($t=$const.) *von ihren Orthogonaltrajektorien gebildet wird, ist die*

$$t\tau = 0\,.$$

*Bedeutet insbesondere t den Bogen der geodätischen Linien, so ist*

$$t\tau = 0\,.$$

**Satz 11:** *Die Orthogonaltrajektorien der Kurven haben die Differentialgleichung*

$$t\tau\,dt + d\tau = 0\,.$$

**Satz 12:** *Die Parameterlinien seien die Minimallinien nicht.*

**Satz 13:** *Wir betrachten eine Kurvenschar*

$$\mathrm{A}\,dt^2 + 2\,\mathrm{B}\,dtd\tau + \mathrm{C}\,d\tau^2 = 0\,, \tag{3}$$

*so ist die Bedingung dafür, dasz die vier durch die Gleichungen* (1) *und* (3) *difinierten Fortschreitungsrichtungen vier harmonische Strahlen bilden:*

$$\begin{vmatrix} A\,at + B\,d\tau & B\,dt + C\,d\tau \\ dt + t\tau d\tau & t\tau dt + d\tau \end{vmatrix} = 0\,.$$

**Satz 14:** *Gegeben die Differentialgleichung*

$$A\,dt + B\,d\tau = 0$$

*eines Kurvensystems auf der Kreisfläche, wo* A *und* B *Funktionen von* $(t, \tau)$ *sind, so ist die Differentialgleichung der Orthogonaltrajektorien*

$$(A\,t\tau - B)\,dt + (A - B\,t\tau)\,d\tau = 0\,.$$

**Satz 15:** *Wenn die beiden Richtungen* $dt_1 : d\tau_1$ *und* $dt_2 : d\tau_2$ *auf unserer Kreisfläche aufeinander senkrecht stehen, so ist*

$$dt_1 dt_2 + t\tau\,(dt_1 d\tau_2 + d\tau_1 dt_2) + d\tau_1 d\tau_2 = 0\,.$$

**Satz 16:** *Ist nämlich* $\varphi$ *der Winkel, den eine beliebige Fortschreitungsrichtung* $dt : d\tau$ *mit der Krümmungslinie* $\tau =$ const. *einschlieszt, so ist*

$$\tan\varphi = d\tau/dt\,,$$

*da* $t\tau = 0$ *gilt.*

**Satz 17:** *Durch die Spaltung von*

$$dt^2 + 2\,t\tau dt d\tau + d\tau^2 = 0$$

*in zwei Linearfaktoren erhält man*

$$\begin{cases} dt + \{t\tau + i\Delta\}\,d\tau = 0\,, \\ dt + \{t\tau - i\Delta\}\,d\tau = 0\,, \end{cases}$$

*wo*

$$\Delta^2 = 1 - t\tau\,.$$

**Satz 18:** *Die Parameterkurven sind isometrische Linien.*

**Satz 19:** *Man kann die Dtfferentialgleichung der Darbouxschen Kurve in der Form*

$$\dot{k}_n = (\dot{t}^2 + 2\,t\tau\,\dot{t}\,\dot{\tau} + \dot{\tau}^2)^{\frac{1}{2}} k_g \tau_g$$

*darstellen, wobei $k_g$, $\tau_g$, $k_n$ die geodätische Krümmung, die geodätische Windung und die Krümmung im Normalschnitt bezeichnen und der Punkt die Ableitung nach dem Kurvenparameter bedeutet*[1].

Aus VOLKS Arbeit[2] kann man sehen, dasz sich alle Kreisflächen in der Form des Linienelements

$$ds^2 = dt^2 + 2\,t\tau dt d\tau + d\tau^2$$

mit geodätischen Dreiecknetzen als Lösungen der Differentialgleichungen

$$\begin{cases} \Phi_{t\tau} + \dfrac{\theta_\tau}{\sin\theta\cos\theta}\,\Phi_t + \cot\theta_t\cdot\Phi_\tau = 0\;(\Phi_t = \cos\theta,\ \Phi_\tau = 1), \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial t}\log\dfrac{\Phi_t}{\cos\theta\sin^2\theta\cdot\Phi_\tau^2} + \dfrac{\partial}{\partial\tau}\log\left(\cot^2\theta\cdot\dfrac{\Phi_\tau}{\Phi_t^2}\right) = 0\,, \end{cases}$$

bestimmen lassen, wo

$$t\,\tau = \cos\theta$$

besteht.

Wir setzen (1) ein in die Form

$$G = \Sigma\, g_{ik}\, dx_i dx_k$$

mit neuen Variabeln $x$, indem wir die $g_{ik}$ als Produkte $f_i f_k$ betrachten.

Hierbei kann man die $f_i$ für die partiellen Ableitungen $\partial f/\partial x_i$ einer symbolischen Funktion $f$ halten.

Man kann setzen

$$G = (df)^2 = (\Sigma f_i\, dx_i)^2\,.$$

Durch die Differentiation von

$$f_i f_k = g_{ik}$$

nach einer der $x$ entstehen die Produkte vom Typus $f_i f_{kl}$ $[kl, i]$, die sich ähnlich wie die CHRISTOFFELschen Dreiindizessymbole verhalten.

(1) HILTON, H.: On Darboux lines, Proceedings of tne London Math. Society **1** (1926), p. 106.

(2) VOLK, O.: Über Flächen mit geodätischen Dreiecksnetzen, Atti Congresso Bolobna **4**, p. 357.

Ist VINCENSINIs Fläche[1] eine Kreisfläche, so folgt

$$(1)\qquad ds^2 = \{(\theta_t\theta_\tau)^2 + \lambda^2\}\, dt^2 + 2\,(\theta_t\theta_\tau)\, dtd\tau + d\tau^2,$$

daraus kann man sehen, dasz die Gleichung der Minimallinien ist:

$$(2)\qquad \{(\theta_t\theta_\tau)^2 + \lambda^2\}\, dt^2 + 2\,(\theta_t\theta_\tau)\, dtd\tau + d\tau^2 = 0.$$

Weiter kann man aus (1) die folgenden Sätze beweisen.

**Satz 1:** *Das Flächendifferential* $dJ$ *wird mit*

$$dJ = \sqrt{\{(\theta_t\theta_\tau)^2 + \lambda^2\} - (\theta_t\theta_\tau)^2}\, dtd\tau = \lambda \cdot dtd\tau$$

*gegeben.*

**Satz 2:** *Besteht das Kurvennetz*

$$A(t,\tau)\, dt^2 + 2\,B(t,\tau)\, dtd\tau + C(t,\tau)\, d\tau^2 = 0$$

*aus lauter Minimalkurven, so ist also*

$$A : B : C = (\theta_t\theta_t) : (\theta_t\theta_\tau) : (\theta_\tau\theta_\tau).$$

**Satz 3:** *Ein Kurvennetz*

$$A(t,\tau)\, dt^2 + 2\,B(t,\tau)\, dtd\tau + C(t,\tau)\, d\tau^2 = 0$$

*auf einer Kreisfläche ist dann und nur dann ein Orthogonalsystem, wenn*

$$\{(\theta_t\theta_\tau)^2 + \lambda^2\}\, C - 2\,(\theta_t\theta_\tau)\, B + A = 0$$

*gilt.*

**Satz 4:** *Definiert die Differentialgleichung*

$$d\tau/dt = \bar{\lambda}(t,\tau)$$

*auf einer Kreisfläche keine Schar von Minimalkurven, so lautet die Differentialgleichung der Kurven, die auf die durch diese Gleichung definierten einfach unendlich vielen Kurven senkrecht sind:*

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{\{(\theta_t\theta_\tau)^2 + \lambda^2\} + (\theta_t\theta_\tau)\,\bar{\lambda}}{(\theta_t\theta_\tau) + \bar{\lambda}}.$$

---

(1) VINCENSINI, P.: Sur une famille de courbes et la représentation géographique des surfaces, L'Enseignement Mathémotique. XXXVII Année, 1938, p. 169.

**Satz 5:** *Die Parameterlinien einer Kreisfläche bilden dann und nur dann ein Kurvennetz ohne Umwege, wenn*

$$\partial/\partial\tau \, \{(\theta_t\theta_\tau)^2 + \lambda^2\} = 0$$

*ist.*

**Satz 6:** *Wenn*

$$(\theta_t\theta_\tau) = 0\,,$$

*so schneiden die Parameterlinien* $(t)$ *und* $(\tau)$ *einander senkrecht.*

**Satz 7:** *Damit sich die Parameterlinien* $(t)$ *und* $(\tau)$ *einer Kreisfläche so anordnen lassen, dasz sie ein Netz von unendlich kleinen Quadraten bilden, ist notwendig und hinreichend, dasz die Fundamentalgrössen* $(\theta_t\theta_\tau)$ *die Bedingungen*

$$(\theta_t\theta_\tau) = 0\,, \quad \alpha^2(t)\cdot\{(\theta_t\theta_\tau)^2 + \lambda^2\} - \beta^2(\tau) = 0$$

*erfüllen.*

*Hier bedeutet* $\alpha$ *eine von Null verschiedene Funktion von* $t$ *allein und* $\beta$ *eine von Null verschiedene Funktion von* $\tau$ *ällein.*

**Satz 8:** *Dafür, dasz sich die Parameterlinien* $(t)$ *und* $(\tau)$ *einer Kreisfläche zu einem Isothermennetze anordnen lassen, in dem* $(t)$ *bzw.* $(\tau)$ *von Kurve zu Kurve um dieselbe unendlich kleine Grösze wachsen, ist notwendig und hinreichend, dasz die zugehörigen Fnndamental grössen* $(\theta_t\theta_\tau)$ *die Bedingungen*

$$(\theta_t\theta_\tau) = 0\,, \quad (\theta_t\theta_\tau)^2 + \lambda^2 = 1$$

*oder*

$$\lambda = 1$$

*erfüllen.*

**Satz 9:** *Wird eine reelle Kreisfläche Punkt für Punkt, aber nicht konform, auf eine andere reelle Kreisfläche abgebildet, so gibt es ein und nur ein Orthogonalsystem auf der einen Kreisfläche, dem auf der anderen Kreisfläche wieder ein Orthogonalsystem entspricht, und diese beiden Orthogonalsysteme sind reell.*

*Da werden jene Orthogonalsysteme durch die Differentialgleichung*

$$\begin{vmatrix} d\tau^2 & (\theta_t\theta_\tau)^2+\lambda^2 & (\overline{\theta_t\theta_\tau})^2+\overline{\lambda}^2 \\ -dtd\tau & (\theta_t\theta_\tau) & (\overline{\theta_t\theta_\tau}) \\ dt^2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

*zwischen t und τ definiert.*

**Satz 10:** *Aus den Minimallinien*

$$\{(\theta_t\theta_\tau)^2+\lambda^2\}\, dt^2 + 2(\theta_t\theta_\tau)\, dtd\tau + d\tau^2 = 0$$

*folgt*

$$\begin{cases} \{(\theta_t\theta_\tau)^2+\lambda^2\}\, dt + \{(\theta_t\theta_\tau)+i\,\mathrm{D}\}\, d\tau = 0\,, \\ \{(\theta_t\theta_\tau)^2+\lambda^2\}\, dt + \{(\theta_t\theta_\tau)-i\,\mathrm{D}\}\, d\tau = 0\,, \end{cases}$$

*wo*

$$i=\sqrt{-1}, \qquad \mathrm{D}=\lambda\,.$$

(**Y**) Wenn die Krümmungslinien parametrig sind, so sind die OCCHIPINTIschen Linien[1]

$$\sqrt{(\theta_t\theta_t)\,\mathrm{D}_{11}}\, dt^2 - \sqrt{(\theta_\tau\theta_\tau)\,\mathrm{D}_{22}}\, d\tau^2 = 0\,,$$

falls unsere Fläche eine Kreisfläche ist, wo $\mathrm{D}_{ij}$ zweite Fundamentalgröszen im Sinne der gewöhnlichen Differentialgeometrie bedeuten.

(**Z**) Wenn man in einer Kreisfläche

$$(1) \qquad ds^2 = \cos^2\sigma \cdot dt^2 + d\tau^2\,,$$

die auf einer Drehfläche abwickelbar ist[2], so folgt

$$(2) \qquad (\theta_t\theta_t)=\cos^2\sigma\,, \quad (\theta_t\theta_\tau)=0\,.$$

Aus (1) kann man die folgenden Sätze herleiten.

**Satz 1:** *Die Gleichungen von Minimallinien sind*

$$\cos^2\sigma\cdot dt^2 + d\tau^2 = 0\,.$$

(1) COCHIPINTI, R.: Sur une double système de Lignes d'une surface, L'Enseignement mathematiques, 16 anné, No. I, (Janvier, 1914).

(2) SANNIA, G.: Congruenze rettilinec che possono deformarsi conservando il parametro medio, Giornale di matematiche di Battaglini per il progresso degli studi nelle università italiane, [(2) 15] 46, p. 299.

**Satz 2:** *Die Parameterlinien $(t)$ und $(\tau)$ sind aufeinander senkrecht.*

**Satz 3:** *Wenn die Kurven* $\varphi=$const. *einem Isothermensystem angehören, ist die Differentialgleichung der Orthogonaltrajektorien dieser Kurven:*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\,dt-\frac{1}{\cos\sigma}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,d\tau=0\,.$$

**Satz 4:** *Ist die geodätische Krümmung der Kurve* $\tau=0$ *Null gleich, so ist*

$$(\partial/\partial\tau\cdot\cos^2\sigma)_{\tau=0}=0\,.$$

**Satz 5:** *Bezeichnet man mit $\theta$ und $\theta_1$ die Windel zweier Kurven,* C *bzw.* C′ *mit der Knrve* $\tau$, *so ist*

$$\begin{cases}\sin\theta=\partial\tau/\partial\alpha\,, & \cos\theta=\partial t/\partial\alpha\,,\\ \sin\theta_1=\partial\tau/\partial\beta\,, & \cos\theta_1=\cos\sigma\cdot\partial t/\partial\beta\,,\end{cases}$$

*deren $\alpha$ und $\beta$ in* BIANCHIS *Buch*[1] *stehen.*

u. s. w..

## ( 2 )

Im folgenden möchten wir

( *a* ) $\eta=\cos\alpha\cdot\xi+\sin\alpha\cdot\xi'$

untersuchen[2], wo $\eta$ und $\xi$ die Kugeln in $R_2$, $\alpha$ ein fester Winkel ist.

(**A**). Die Kugeln

$$_{(i)}\mathfrak{x}\quad [i=1,2,3]$$

lassen sich durch die Beziehungen darstellen:

( 1 ) $_{(i)}\mathfrak{x}={}_{(i)}\mathfrak{y}+{}_{(i)}\lambda\,{}_{(i)}\eta\,,\quad [i=\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III}]$

(1) Vgl. z. B. LUKAT, M.: BIANCHIS Vorlesungen über Differentialgeometrie, Liepzig und Berlin, (1910), S. 215.

(2) THOMSEN, G.: Über konforme Geo. II, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ., IV Bd. (1926), S. 132.

oder

$$(2)\qquad {}_{(i)}\mathfrak{x} = {}_{(i)}\mathfrak{y} + {}_{(i)}\lambda\,\{\cos{}_{(i)}\alpha\cdot{}_{(i)}\xi + \sin{}_{(i)}\alpha\cdot{}_{(i)}\xi'\}$$

wo ${}_{(i)}\lambda$ skalare Grõszen sind.

Der Schnitt von drei Kugeln (2) bezeichnet zwei Punkte in $R_3$.

(**B**) Wir betrachten

$$(1)\qquad \begin{cases} {}_{(1)}\xi = {}_{(1)}\mathfrak{a} + {}_{(1)}\bar{\xi}\cos\alpha - {}_{(2)}\bar{\xi}\sin\alpha, \\ {}_{(2)}\xi = {}_{(2)}\mathfrak{a} + {}_{(1)}\bar{\xi}\sin\alpha + {}_{(2)}\bar{\xi}\cos\alpha, \end{cases}$$

wo ${}_{(i)}\bar{\xi}$, ${}_{(i)}\xi$, ${}_{(i)}\mathfrak{a}$ Kreise in $R_2$, $\alpha$ Konstonte ist.

Da

$$(2)\qquad {}_{(1)}\bar{\xi} \perp {}_{(2)}\bar{\xi}, \qquad {}_{(1)}\xi \perp {}_{(2)}\xi$$

gelten.

Die Gesamtheit aller möglichen Transformationen (1) bildet eine Gruppe, d. h. wenn man die ${}_{(i)}\bar{\xi}$ einer gleichartigen Transformation

$$(3)\qquad \begin{cases} {}_{(1)}\bar{\xi} = {}_{(1)}\bar{\mathfrak{a}} + {}_{(1)}\bar{\bar{\xi}}\cos\beta - {}_{(1)}\bar{\bar{\xi}}\sin\beta, \\ {}_{(2)}\bar{\xi} = {}_{(2)}\bar{\mathfrak{a}} + {}_{(1)}\bar{\bar{\xi}}\sin\beta + {}_{(2)}\bar{\bar{\xi}}\cos\beta, \quad {}_{(1)}\bar{\bar{\xi}} \perp {}_{(2)}\bar{\bar{\xi}}, \end{cases}$$

unterwirft, so ergibt sich auch zwischen ${}_{(i)}\xi$ und ${}_{(i)}\bar{\bar{\xi}}$ ein Gleichungs system derselben Form

$$(4)\qquad \begin{cases} {}_{(1)}\xi = {}_{(1)}\bar{\bar{\mathfrak{a}}} + {}_{(1)}\bar{\bar{\xi}}\cos\bar{\alpha} - {}_{(2)}\bar{\bar{\xi}}\sin\bar{\alpha}, \\ {}_{(2)}\xi = {}_{(2)}\bar{\bar{\mathfrak{a}}} + {}_{(1)}\bar{\bar{\xi}}\sin\bar{\alpha} + {}_{(2)}\bar{\bar{\xi}}\cos\bar{\alpha}, \end{cases}$$

wobei zwischen den ${}_{(i)}\mathfrak{a}$, ${}_{(i)}\bar{\mathfrak{a}}$, ${}_{(i)}\bar{\bar{\mathfrak{a}}}$, $\alpha$, $\beta$, $\bar{\alpha}$ bekannte und leicht herzuleitende Beziehungen bestehen.

Zu dieser Transformation gehört auch die „*identische*“

$$(5)\qquad {}_{(1)}\xi = {}_{(1)}\bar{\xi}, \quad {}_{(2)}\xi = {}_{(3)}\bar{\xi},$$

und zu jeder Transformotion (1) gibt es eine und eine „*inverse*“ Transformation

$$(6)\qquad \begin{cases} {}_{(1)}\bar{\xi} = {}_{(1)}\mathfrak{a}' + {}_{(1)}\xi\cos\alpha + {}_{(2)}\xi\sin\alpha, \\ {}_{(2)}\bar{\xi} = {}_{(2)}\mathfrak{a}' - {}_{(1)}\xi\cos\alpha + {}_{(2)}\xi\cos\alpha, \end{cases}$$

die gleichfalls der Gruppe angehört.

Aus einer Bewegung in der Kreisebene werden ${}_{(1)}\xi$, ${}_{(2)}\xi$ durch eine Substitution (1) dargestellt.

Dabei verstehen wir unter den ${}_{(1)}\xi$, ${}_{(2)}\xi$ die Ursprungskreise und unter ${}_{(1)}\bar{\xi}$, ${}_{(2)}\bar{\xi}$ die entsprechenden Kreise.

(**C**) Wir betrachten

$$(1) \qquad \mathfrak{x} = \mathfrak{a} + \lambda\eta ,$$

wo $\mathfrak{x}$, $\eta$ Kreise in $R_2$, $\lambda$ ein Parameter ist.

$\mathfrak{x}$ in (1) bezeichnet einen Kreisbüschel, wo $\mathfrak{a}$ ein fester Kreis in $R_2$ ist

Nun setzen wir

$$(2) \qquad \eta = \cos\alpha \cdot \xi + \sin\alpha \cdot \xi' ,$$

so folgt aus (1) und (2)

$$(3) \qquad \mathfrak{x} = \mathfrak{a} + \lambda \{\cos\alpha \cdot \xi + \sin\alpha \cdot \xi'\},$$

daraus ergibt sich

$$(4) \qquad d\mathfrak{x}/d\sigma = \lambda \{\cos\alpha \cdot \xi' + \sin\alpha \cdot \xi''\},$$

wo $\alpha$ ein fester Winkel ist. Da $\sigma$ in THOMSENs Arbeit[1] gilt.

## ( 3 )

Im folgenden möchten wir

$$(a) \qquad \cos^2\varphi = T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta$$

untersuchen[2].

(**A**) Wir betrachten $\mathfrak{y}(t)$, so erhalten wir $\cos^2\varphi(t)$, wo $t$ ein Parameter ist.

Zu Maximum-oder Minimumwerte von $\cos^2\varphi(t)$ setzen wir

$$d/dt \cos^2\varphi(t) = 0 ,$$

(1) THOMSEN, G.: Über konforme Geo. II, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ., Bd. IV (1925), S. 130.

(2) NAKAZIMA, S.: Differentialgeo. der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ. 34 (1931), S. 196.

so folgt

$$2\cos\varphi \sin\varphi \cdot \varphi' = 0$$

oder

$$\sin 2\varphi(t)\cdot d\varphi/dt = 0$$

d. h.

(1) $\varphi = \text{const}$ oder $\sin 2\varphi = 0$.

(1) ist unsere Bedingung.

Aus (1) folgt

(2) $\varphi = \text{const.}$ oder $T^{\alpha\beta}\rho_\alpha(t)\,\rho_\beta(t)\,\{(A^{\alpha\beta}-T^{\alpha\beta})\,\rho_\alpha(t)\,\rho_\beta(t)\}=0$

Ist

$$d/dt\cdot\cos^2{}_{(1)}\varphi(t) = d/dt\cdot\cos^2{}_{(2)}\varphi(t)$$

in zwei Systemen von ${}_{(1)}\mathfrak{K}$, ${}_{(1)}\bar{\mathfrak{K}}$; ${}_{(2)}\mathfrak{K}$, ${}_{(2)}\bar{\mathfrak{K}}$, so entsteht

$$(3)\quad \begin{cases} {}_{(1)}T^{\alpha\beta}\,{}_{(1)}\rho_\alpha(t)\,{}_{(1)}\rho(t)\,\{({}_{(1)}A^{\alpha\beta}-{}_{(1)}T^{\alpha\beta})\,{}_{(1)}\rho_\alpha(t)\,{}_{(1)}\rho(t)\} \\ \quad = {}_{(2)}T^{\alpha\beta}{}_{(2)}\rho(t)\,{}_{(2)}\rho(t)\,\{({}_{(2)}A^{\alpha\beta}-{}_{(2)}T^{\alpha\beta})\,{}_{(2)}\rho_\alpha(t)\,{}_{(2)}\rho(t)\}. \end{cases}$$

(**B**) Halten wir $\mathfrak{K}$ und $\bar{\mathfrak{K}}$ fest und verändern $\mathfrak{y}$, so folgt

(1) $\cos^2\varphi(t) = T^{\alpha\beta}\,\rho_\alpha(t)\,\rho_\beta(t)$,

wo $\rho$ und $\varphi$ Funktionen eines Parameters $t$ und $T^{\alpha\beta}$ Konstanten sind.

Halten wir $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{K}$ fest und verändern $\bar{\mathfrak{K}}$, so folgt

(2) $\cos^2\varphi(t) = T^{\alpha\beta}(t)\,\rho_\alpha\rho_\beta$,

wo $T^{\alpha\beta}$ Konstanten sind.

(**C**) Wir betrachten

(1) $(T^{\alpha\beta} - k^2A^{\alpha\beta})\,\rho_\alpha\rho_\beta = 0$,

wo $\cos^2\varphi = k^2$ in $(a)$ ist.

Setzen wir

(2) $\rho_\alpha = c^t_i\,\bar{\rho}_t$, $\quad |c^t_i| \neq 0$

in (1), wo $\bar{\rho}_j = (T_{jl} - k^2A_{jl})\,\gamma^l_m\,(T^{mn} - k^2A^{mn})\,\bar{\bar{\rho}}_n$, so transformiert sich

$$(3) \qquad (T^{ij} - k^2 A^{ij})\, \rho_i \bar{\rho}_j = 0$$

in

$$(4) \qquad \begin{cases} 0 = (T^{ij}-k^2A^{ij})\, c_i^t\, (T_{jl}-k^2A_{jl})\, \gamma_m^l\, (T^{mn}-k^2A^{mn})\, \bar{\rho}_t\, \bar{\bar{\rho}}_n \\ \quad = c_i^t\, \gamma_m^l\, T^{mn}-k^2A^{mn})\, \bar{\rho}_t\, \bar{\bar{\rho}}_n = (T^{tn}-k^2A^{tn})\, \bar{\rho}_t\, \bar{\bar{\rho}}_n \end{cases}$$

wo

$$(5) \qquad c_j^i \gamma_k^j = \delta_k^i = \begin{cases} 0 & i \neq k, \\ 1 & i = k, \end{cases} \quad a_{ij} a^{jk} = \delta_i^k .$$

(**D**) Im folgenden möchten wir die Kreisgeometrie in $R_2$ untersuchen, die wir mit der ähnlichen Methode wie in meiner Arbeit(1) behandeln können.

Betrachten wir zwei Sehnen $\mathfrak{p}$ und $\bar{\mathfrak{p}}$ in $R_2$ derart, dasz alle durch die gehenden Kreise den gleichen Winkel miteinander bilden.

Ist (1) $\mathfrak{y} = \rho_\alpha \mathfrak{x}^\alpha$ ein durch $\mathfrak{p}$ normierter Kreis mit

$$(2) \qquad \mathfrak{y}\mathfrak{y} = \rho_\alpha \rho_\beta A^{\alpha\beta} = 1$$

so muss

$$(3) \qquad \cos^2 \varphi = \rho_\alpha \rho_\beta T^{\alpha\beta}$$

sein, wo $\varphi$ den Winkel zwischen (1) und Sehne $\bar{\mathfrak{p}}$ bedeutet.

Das ist dann möglich, wenn

$$(4) \qquad T^{\alpha\beta} \text{ prop. } A^{\alpha\beta}, \quad \bar{T}^{\lambda\mu} \text{ prop. } \bar{A}^{\lambda\mu} .$$

Aus $T_\alpha^\alpha = \bar{T}_\lambda^\lambda$ ergibt sich dann, dasz die beiden Winkel einander gleich sind.

Vergleiche das Zeichen mit meiner Arbeit(2)

(**E**) Wir betrachten zwei Kugelbüschel $\mathfrak{x}^\alpha$ und $\mathfrak{y}^\beta$ [$\alpha, \beta$=I, II] in $R_3$, so ist der Winkel $\alpha$ zwischen

$$\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}\rho_{\mathrm{I}} + \mathfrak{x}^{\mathrm{II}}\rho_{\mathrm{II}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{y}^{\mathrm{I}}\rho_{\mathrm{I}} + \mathfrak{y}^{\mathrm{II}}\rho_{\mathrm{II}} :$$

---

(1) NAKAZIMA, S.: Kugelgeo. von MÖBIUS, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol 2, S. 18.

(2) NAKAZIMA, S.: Differentialgeo. der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ., Vol. 2, S. 18.

$$\left\{\begin{aligned}\cos\alpha &= (\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}\rho_{\mathrm{I}} + \mathfrak{x}^{\mathrm{II}}\rho_{\mathrm{II}},\quad \mathfrak{y}^{\mathrm{I}}\rho_{\mathrm{I}} + \mathfrak{y}^{\mathrm{II}}\rho_{\mathrm{II}})\\ &= (\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}\mathfrak{y}^{\mathrm{I}})\,\rho_{\mathrm{I}}^2 + \{(\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}\mathfrak{y}^{\mathrm{II}}) + (\mathfrak{x}^{\mathrm{II}}\mathfrak{y}^{\mathrm{I}})\}\,\rho_{\mathrm{I}}\rho_{\mathrm{II}} + (\mathfrak{x}^{\mathrm{II}}\mathfrak{x}^{\mathrm{II}})\,\rho_{\mathrm{II}}^2\\ &= \rho_{\mathrm{I}}^2 + \{\cos\varphi + \cos\phi\}\,\rho_{\mathrm{I}}\rho_{\mathrm{II}} + \rho_{\mathrm{II}}^2\\ &= \rho_{\mathrm{I}}^2 + 2\,\{\cos^2\tfrac{\varphi}{2} - \sin^2\tfrac{\phi}{2}\}\,\rho_{\mathrm{I}}\rho_{\mathrm{II}} + \rho_{\mathrm{II}}^2\\ &= \rho_{\mathrm{I}}^2 + 4\cos\left(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\varphi}{2}\right)\rho_{\mathrm{I}}\rho_{\mathrm{II}} + \rho_{\mathrm{II}}^2,\end{aligned}\right.$$

wenn $\varphi = \phi$, wo $\varphi = \widehat{\mathfrak{x}^{\mathrm{I}},\mathfrak{y}^{\mathrm{II}}}$, $\phi = \widehat{\mathfrak{x}^{\mathrm{II}},\mathfrak{y}^{\mathrm{I}}}$.

Liegen die Schnittpunkte von

$$(1)\quad \mathfrak{x}^{\mathrm{I}}\rho_{\mathrm{I}} + \mathfrak{x}^{\mathrm{II}}\rho_{\mathrm{II}} \qquad \text{und} \qquad (2)\quad \mathfrak{y}^{\mathrm{I}}\rho_{\mathrm{I}} + \mathfrak{y}^{\mathrm{II}}\rho_{\mathrm{II}}$$

für alle $\rho$ immer auf einer Gerade $g$, so wird der Winkel $\phi$ gegeben durch

$$\cos^2\phi = T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta.$$

Gleichfalls gilt

$$\cos^2\bar{\phi} = \bar{T}^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta,$$

wo $\bar{\phi}$ der Winkel zwischen $g$ und (2) ist.

(**F**) Betrachten wir drei Kreise $\mathfrak{K}$, $\bar{\mathfrak{K}}$ und $\bar{\bar{\mathfrak{K}}}$ in $R_3$.

Ist

$$(1)\qquad \mathfrak{y} = \rho_\alpha\mathfrak{x}^\alpha$$

eine durch $\mathfrak{K}$ normierte Kugel mit

$$(2)\qquad \mathfrak{y}\mathfrak{y} = \rho_\alpha\rho_\beta\, A^{\alpha\beta} = 1,$$

so muss

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}\cos^2\varphi &= \rho_\alpha\rho_\beta\, T^{\alpha\beta}\\ \cos^2\bar{\varphi} &= \rho_\alpha\rho_\beta\, \bar{T}^{\alpha\beta}\end{aligned}\right.$$

sein, wo $\varphi$ der Winkel zwischen $\mathfrak{y}$ und $\bar{\mathfrak{K}}$, $\bar{\varphi}$ der zwischen $\mathfrak{y}$ und $\bar{\bar{\mathfrak{K}}}$ ist.

Wenn $\varphi = \frac{\pi}{2} - \bar{\varphi}$ gilt, so folgt

$$(4)\qquad \rho_\alpha\rho_\beta\, T^{\beta\beta} = (A^{\alpha\beta} - \bar{T}^{\alpha\beta})\,\rho_\alpha\rho_\beta.$$

Besteht (4) für jeden Wert von $\rho$, so bekommen wir

$$(5) \qquad T^{\alpha\beta} \equiv A^{\alpha\beta} - \overline{T}^{\alpha\beta},$$

oder

$$(6) \qquad T^{\alpha\beta} + \overline{T}^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta}.$$

(**G**) Wir betrachten zwei Punkte P und P in $R_2$, die jede Gerade hindurch gehen. Sie sind in der folgenden Form bezeichnenbar:

$$\cos\varphi = T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta,$$

wo $\varphi$ der Winkel zwischen $p$ und $\bar{p}$ ist.

Hier bedeutet $p$ eine beliebige durch $p$ gehende Gerade und $\bar{p}$ eine feste durch $\bar{p}$ hindurch gehende Gerade.

Es ist mit dem Zeichen hier wie mit dem in meiner Arbeit(1).

(**H**) Wir betrachten

$$(1) \qquad \cos^2\varphi = \{T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta\} : \{A^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta\}.$$

Gilt (1) für alle Werte von $\rho_i$, so ergibt sich

$$(2) \qquad \begin{cases} \cos^2\varphi = \dfrac{T^{11}\rho_1^2 + 2\,T^{12}\rho_1\rho_2 + T^{22}\rho_2^2}{A^{11}\rho_1^2 + 2\,A^{12}\rho_1\rho_2 + A^{22}\rho_2^2} \\[2ex] \qquad\;\; = \dfrac{T^{11} + 2\,T^{12}k + T^{22}k^2}{A^{11} + 2\,A^{12}k + A^{22}k^2}, \quad \left(k = \dfrac{\rho_2}{\rho_1}\right) \end{cases}$$

für alle Werte von $\rho_i$, daraus ist A herzuleiten:

$$(3) \qquad \cos^2\varphi = \frac{T^{11}}{A^{11}} = \frac{T^{12}}{A^{12}} = \frac{T^{22}}{A^{22}}.$$

(**I**) Wir ordnen nun der binären quadratischen Form

$$(1) \qquad \cos^2\varphi = T^{11}\rho_1^2 + 2\,T^{12}\rho_1\rho_2 + T^{22}\rho_2^2$$

denjenigen Punkt zu, dessen homogene Koordinaten $T^{11} : T^{12} : T^{22}$ sind.

Es entspricht dann jeder Form ein bestimmter Punkt.

Durch

$$(2) \qquad \begin{cases} \rho_1 = \alpha\,\bar{\rho}_1 + \beta\,\bar{\rho}_2, \\ \rho_2 = \gamma\,\bar{\rho}_1 + \delta\,\bar{\rho}_2 \end{cases}$$

(1) NAKAZIMA, S.: Differentialgeometrie der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ., Vol. 34 (1934), S. 196.

geht die Form (1) in die Form

$$(3)\qquad \cos^2\varphi\cdot S \equiv \cos^2\bar{\varphi} \equiv \bar{T}^{11}\bar{\rho}_1^2 + 2\,\bar{T}^{12}\bar{\rho}_1\bar{\rho}_2 + \bar{T}^{22}\bar{\rho}_2^2$$

über, wo

$$(4)\qquad \begin{cases} \bar{T}^{11} = T^{11}\alpha^2 + 2\,T^{12}\alpha\gamma + T^{22}\gamma^2\,, \\ \bar{T}^{12} = T^{11}\alpha\beta + T^{12}(\alpha\delta + \beta\gamma) + T^{22}\gamma\delta\,, \\ \bar{T}^{22} = T^{11}\beta^2 + 2\,T^{12}\beta\delta + T^{22}\delta^2 \end{cases}$$

ist.

Es wird demnach durch die Transformation S jedem Punktc ($T^{11}$, $T^{12}$, $T^{22}$) ein bestimmter Punkt ($\bar{T}^{11}$, $\bar{T}^{12}$, $\bar{T}^{22}$) zugeordnet.

Wenn

$$(5)\qquad \alpha = \beta\,,\qquad \gamma = \delta$$

gilt, so folgt

$$(6)\qquad \begin{cases} \bar{T}^{11} = T^{11}\alpha^2 + 2\,T^{12}\alpha\gamma + T^{22}\gamma^2\,, \\ \bar{T}^{12} = T^{11}\alpha^2 + 2\,T^{12}\alpha\gamma + T^{22}\gamma^2\,, \\ \bar{T}^{22} = T^{11}\alpha^2 + 2\,T^{12}\alpha\gamma + T^{22}\gamma^2\,, \end{cases}$$

daraus ergibt sich

$$(7)\qquad \bar{T}^{11} = \bar{T}^{12} = \bar{T}^{22}\,,$$

oder

$$(8)\qquad \cos^2\bar{\varphi} = \bar{T}^{11}(\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_3)^2\,.$$

( **J** ) Wir betrachten

$$(1)\qquad (T^{\alpha\beta} - k^2 A^{\alpha\beta})\,\rho_\alpha\rho_\beta = 0$$

und

$$(2)\qquad (T^{\alpha\beta} - \bar{k}^2 A^{\alpha\beta})\,\rho_\alpha\rho_\beta = 0$$

in (**C**); es wird verlangt, die Bedingung dafür aufzustellen, dasz sich die beiden Elementenpaare harmonisch trennen.

Die gesuchte Bedingung für sich harmonisch trennende Elementenpaare ist:

$$(3)\quad \begin{cases} (T^{11}-k^2A^{11})(T^{22}-\bar{k}^2A^{22})-3(T^{12}-k^2A^{12})(T^{12}-\bar{k}^2A^{12}) \\ \qquad\qquad\qquad +(T^{22}-k^2A^{22})(T^{11}-\bar{k}^2A^{11})=0\,. \end{cases}$$

Liegt zu jedem der drei gegebenen Elementenpaare

$$(4)\quad (T^{\alpha\beta}-k^2A^{\alpha\beta})\,\rho_\alpha\rho_\beta=0\,,$$

$$(5)\quad (T^{\alpha\beta}-\bar{k}^2A^{\alpha\beta})\,\rho_\alpha\rho_\beta=0\,,$$

$$(6)\quad (T^{\alpha\beta}-\bar{\bar{k}}^2A^{\alpha\beta})\,\rho_\alpha\rho_\beta=0$$

harmonisch ein solches

$$(7)\quad B^{\alpha\beta}\,\rho_\alpha\rho_\beta=0\,,$$

so folgt aus (4), (7); (5), (7); (6), (7):

$$\begin{cases} (T^{11}-k^2A^{11})B^{22}-2(T^{12}-k^2A^{12})B^{12}+(T^{22}-k^2A^{22})B^{11}=0\,, \\ (T^{11}-\bar{k}^2A^{11})B^{22}-2(T^{12}-\bar{k}^2A^{12})B^{12}+(T^{22}-\bar{k}^2A^{22})B^{11}=0\,, \\ (T^{11}-\bar{\bar{k}}^2A^{11})B^{22}-2(T^{12}-\bar{\bar{k}}^2A^{12})B^{12}+(T^{22}-\bar{\bar{k}}^2A^{22})B^{11}=0\,, \end{cases}$$

daraus ergibt sich

$$\begin{vmatrix} T^{11}-k^2A^{11} & T^{12}-k^2A^{12} & T^{22}-k^2A^{22} \\ T^{11}-\bar{k}^2A^{11} & T^{12}-\bar{k}^2A^{12} & T^{22}-\bar{k}^2A^{22} \\ T^{11}-\bar{\bar{k}}^2A^{11} & T^{12}-\bar{\bar{k}}^2A^{12} & T^{22}-\bar{\bar{k}}^2A^{22} \end{vmatrix}=0$$

als die gesuchte, notwendige und hinreichende Bedingung.

## ( 4 )

Im folgenden möchten wir einige Bemerkungen über Hyperboloidscharen machen(1).

(**A**) Wir betrachten zwei Geraden $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$. Es gelten

$$(1)\quad (\mathfrak{p}\mathfrak{p})=0\,,$$

$$(2)\quad (\mathfrak{q}\mathfrak{q})=0\,,$$

(1) NAKAZIMA, S.: Differentialgeometrie der Hyperboloidscharen, Zyklidenscharen und Kurvenpaaren, Tôhoku Math. Journ. Vol. 31 (1929), S. 227,

$$(3) \qquad (\mathfrak{p}\mathfrak{q}) = 0\,,$$

wo $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ einander schneiden.

Aus (3) folgt

$$d\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q} + \mathfrak{p}\cdot d\mathfrak{q} = 0\,.$$

Nun kann man setzen

$$d\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q} = \text{konst.}\ (= k)\,,$$

denn wenn wir setzen

$$\bar{\mathfrak{p}} = \rho\mathfrak{p}\,, \qquad \bar{\mathfrak{q}} = \bar{\rho}^{-1}\mathfrak{q}\,,$$

so folgt:

$$\begin{cases} d\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q} = (\rho\cdot d\mathfrak{p} + d\rho\cdot\mathfrak{p})(\rho^{-1}\mathfrak{q}) \\ \qquad\quad = d\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q} + d\rho\cdot\rho^{-1}\cdot\mathfrak{p}\mathfrak{q}\,. \end{cases}$$

Damit

$$d\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q} + d\rho\cdot\rho^{-1} = \text{konst.}\ (= k)$$

ist, so musz sein:

$$d\rho/\rho = k - d\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q} \quad \text{i. e.} \quad \rho = \exp.(-d\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q})\,.$$

Aus

$$d\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q} = k\,,$$

folgt

$$d^2\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q} + d\mathfrak{p}\cdot d\mathfrak{q} = 0\,.$$

Betrachten wir nun drei quadratische Differentialformen

$$(4) \qquad \begin{cases} d\mathfrak{p}\cdot d\mathfrak{q} = G_{ij}\,au^i du^j\,, \\ (d\mathfrak{p})^2 = g_{ij}\,du^i du^j\,, \\ (d\mathfrak{q})^2 = \bar{g}_{ij}\,du^i du^j\,, \end{cases}$$

wobei $d\mathfrak{p}$, $d\mathfrak{q}$ zwei gegebene Fortschreitungsrichtungen bedeuten.

Ihre absolute Invariante ist

$$(5) \qquad \mathrm{I} = \frac{(G_{ij}\, du^i\, du^j)^2}{(g_{ij}\, du^i\, du^j)\,(\bar{g}_{ij}\, du^i\, du^j)},$$

wenn $G_{ij} \equiv 0$, dann $\mathrm{I} = 0$, wenn $g_{ij} \equiv 0$ oder $\bar{g}_{ij} \equiv 0$, dann muss $G_{ij} \equiv 0$ sein.

(5) sind bei der Transformation der Parameter invariant. Weiter kann man untersuchen wie in meiner Arbeit(1).

(**B**) Wir betrachten GRÜNWALDS Arbeit(2); man kann untersuchen wie oben.

(**C**) Unsre Kugelgeometrie ist auf die Korrelation anwendbar(3).

## ( 5 )

Im folgenden behandeln(3) wir die Inversionsgeometrie, d. h. die

$$(a) \qquad \mathfrak{y} = 2(\mathfrak{z}\,\mathfrak{x})\,\mathfrak{x} - \mathfrak{z}.$$

(**A**) Aus ($a$) folgt

$$(1) \qquad \{\mathfrak{y} + \mathfrak{z}\} : 2 = (\mathfrak{z}\,\mathfrak{x})\,\mathfrak{x}$$

oder

$$(2) \qquad \mathfrak{x} = (\mathfrak{z}\,\mathfrak{x})\,\mathfrak{x},$$

wo

$$(3) \qquad \{\mathfrak{y} + \mathfrak{z}\} : 2 \equiv \mathfrak{x}$$

gesetzt ist.

Aus (2) kann man wissen, dasz die Mittelkugel $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ mit $(\mathfrak{z}\,\mathfrak{x})\,\mathfrak{x}$ gegeben wird.

Wir wollen $\mathfrak{x}$ *die inverse mittelkugel von* $\mathfrak{z}$ *in bezug auf* $\mathfrak{x}$ (kurzl. *M. I. K. von* $\mathfrak{z}$ *inbezug auf* $\mathfrak{x}$) nennen. wo $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}$ die Kugeln in $R_n$ sind.

---

(1) Vgl, NAKAZIMA, a. a. O., S. 192.

(2) GRÜNWALD, J.: Ein Abbildungsprinzip, welches die ebene Geometrie und Kinematik mit der räumlichen Geometrie verknüpft, Sitzungsberichten der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathem.-naturw. Klasse; Bd. CXX. Abt. II a. Mai 1911, S. 1.

(3) MATUMURA, S.: Mathematical statistics, Tokyo, (1937).

Ist $\mathfrak{z}$ eine inverse Kugel, so folgt aus (1)

$$(4) \qquad \mathfrak{z} = (\mathfrak{z}\,\xi)\,\xi\,,$$

wo

$$(5) \qquad \mathfrak{x} \equiv \mathfrak{z}$$

in (1) gilt.

Aus (4) kann man herleiten den folgenden

**Satz:** *Ist* $\mathfrak{z}$ *eine inverse Kugel, so ist* $\mathfrak{z}$ *nicht anders als M. I. K. von* $\mathfrak{z}$ *inbezug auf* $\xi$.

Wenn

$$(6) \qquad \mathfrak{y} \equiv -\,\mathfrak{z},$$

so folgt aus ($a$)

$$(7) \qquad (\mathfrak{z}\,\xi)\,\xi = 0\,.$$

In diesem Falle wird M. I. K. $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{z}$ inbezug auf $\xi$ mit

$$\mathfrak{x} \equiv 0$$

gegeben.

Ist ein Punkt anstatt der Kugel, so ist

$$(8) \qquad \{\mathfrak{y} + \mathfrak{z}\} : 2$$

ein Punkt.

In diesem Falle nennen wir (7) M. I. P. von $\mathfrak{z}$ inbezug auf $\xi$.

Liegt M. I. P. von $\mathfrak{z}$ inbezug auf $\xi$ auf $\xi$, so folgt

$$(9) \qquad (\mathfrak{z}\,\xi) = 0\,,$$

daraus kann man wissen, dasz der Punkt $\mathfrak{z}$ auf der Kugel $\xi$ liegt.

Ist $\mathfrak{y}+\mathfrak{z}/2$ ein fester Punkt, so folgt aus (1)

$$(d\mathfrak{z}/dt \cdot \xi)\,\xi = 0\,,$$

wo $\mathfrak{z}$ eine Funktion eines Parameters $t$ und $\xi$ eine feste Kugel bedeutet.

(**B**) Wir betrachten

$$(1) \qquad \mathfrak{y} = 1/n : ({}_{(1)}\mathfrak{x} + {}_{(2)}\mathfrak{x} + \dots + {}_{(n)}\mathfrak{x})$$

wo $\mathfrak{y}$ und

$$_{(i)}\mathfrak{x} \qquad [i = 1, 2, \ldots, n]$$

Kugeln in $R_n$ sind.

Aus (1) folgt

$$(2) \qquad ({}_{(1)}\mathfrak{x} - \mathfrak{y}) + ({}_{(2)}\mathfrak{x} - \mathfrak{y}) + \cdots + ({}_{(n)}\mathfrak{x} - \mathfrak{y}) = 0 .$$

Wenn

$$(3) \qquad {}_{(i)}\mathfrak{x} = 2(\mathfrak{y}\,{}_{(i)}\xi)\,{}_{(i)}\xi + \mathfrak{y} \qquad [i = 1, 2, \ldots, n]$$

gilt[1], so folgt aus (2) und (3)

$$(4) \qquad (\mathfrak{y}\,{}_{(1)}\xi)\,{}_{(1)}\xi + (\mathfrak{y}_{(2)}\xi)\,{}_{(2)}\xi + \cdots + (\mathfrak{y}\,{}_{(n)}\xi)\,{}_{(n)}\xi = 0$$

oder

$$(5) \qquad (\mathfrak{y}_{(1)}\xi)({}_{(1)}\xi_{(1)}\xi) + (\mathfrak{y}_{(2)}\xi)(\xi_{(1)}\xi_{(2)}) + \cdots + (\mathfrak{y}_{(n)}\xi)({}_{(1)}\xi_{(n)}\xi) = 0 .$$

Gilt

$$(6) \qquad {}_{(2)}\xi \perp {}_{(1)}\xi , \quad {}_{(3)}\xi \perp {}_{(1)}\xi , \quad \cdots , \quad {}_{(n)}\xi \perp {}_{(1)}\xi ,$$

so folgt aus (5)

$$(7) \qquad (\mathfrak{y}\,{}_{(1)}\xi) = 0 ,$$

Gleichfalls gelten

$$(8) \qquad (\mathfrak{y}\,{}_{(i)}\xi) = 0 \qquad [i = 2, 3, \cdots, n]$$

d. h. bestehen

$$(9) \qquad (\mathfrak{y}\,{}_{(i)}\xi) = 0 \qquad [i = 1, 2, \cdots, n];$$

daher kann man sagen, dasz in unserm Falle $\mathfrak{y}$ senkrecht sind auf

$$(10) \qquad {}_{(i)}\xi \qquad [i = 1, 2, \cdots, n].$$

Aus (4) folgt

$$(11) \qquad \sum (\mathfrak{y} \cdot {}_{(i)}\xi)(\mathfrak{x} \cdot {}_{(i)}\xi) = 0 ,$$

so sieht man, dasz

$$(12) \qquad \cos {}_{(i)}\phi \cos {}_{(i)}\varphi = 0$$

---

1) THOMSEN, G.: Über konforme Geometrie II, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ., IV Bd., R. 122.

gilt, wo ${}_{(i)}\phi$ der Winkel zwischen $\mathfrak{y}$ und ${}_{(i)}\xi$, ${}_{(i)}\varphi$ der zwischen $\mathfrak{x}$ und ${}_{(i)}\xi$ ist. Da $\mathfrak{x}$ die Kugel in $R_n$ ist.

Man kann (4) in der Form schreiben:

$$(13) \qquad \sum (\text{M. I. K. von } \mathfrak{y} \text{ inbezug auf } {}_{(i)}\xi) = 0 .$$

(**C**) Nehmen wir einen Punkt anstatt I.M.P. von $\mathfrak{x}$, die die Strecke zwischen zwei Punkten $\mathfrak{z}$ unn $\mathfrak{y}$ teilt, so kann man untersuchen wie oben.

Von I. M. K. von $\mathfrak{x}$ gilt das gleiche.

(**D**) Aus

$$\mathfrak{y} = 2(\mathfrak{z}\,\xi)\,\xi - \mathfrak{z} .$$

und

$$\bar{\mathfrak{y}} = 2(\bar{\mathfrak{z}}\,\xi)\,\xi - \bar{\mathfrak{z}}$$

folgt

$$(\mathfrak{y}\,\bar{\mathfrak{y}}) : (\mathfrak{z}\,\bar{\mathfrak{z}}) = 1 .$$

## ( 6 )

Im folgenden möchten wir einige Bemerkungen über die Geometrie der Kreise und Kugeln machen.

(**A**) Betrachten wir

$$(1) \qquad \mathfrak{x} = \{\xi - \varepsilon\eta\}\,\{\sqrt{1 + 2\,\varepsilon\,(\xi\eta)}\} ,$$

so folgt

$$(2) \qquad (\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = 1 ,$$

$$(3) \qquad (\mathfrak{x}\xi) = \{1 - \varepsilon\,(\xi\eta)\}\,\sqrt{1 + 2\,\varepsilon\,(\xi\eta)} = 1$$

und

$$(4) \qquad (\mathfrak{x}\eta) = \{(\xi\eta) - \varepsilon\}\,\sqrt{1 + 2\,\varepsilon\,(\xi\eta)} = 1 ;$$

daraus sieht man, dasz $\mathfrak{x}$ in (1) eine Kugel in $R_n$ bezeichnet und zwei Kugeln $\xi$ und $\eta$ in $R_n$ berührt, wo $\varepsilon^2 = 0$, $(\xi\xi) = 1$, $(\eta\eta) = 1$ sind.

Wenn die Kugel $\mathfrak{y}$ auf $\mathfrak{x}$ senkrecht ist, so folgt aus (1)

$$(5) \qquad (\xi\mathfrak{y}) = \varepsilon\,(\eta\mathfrak{y})$$

oder

$$(6) \qquad (\xi\eta) = -1/2\,\varepsilon\,,$$

so sieht man, dasz

$$(7) \qquad \cos\phi_1 = \varepsilon \cos\phi_2$$

oder

$$(8) \qquad \cos\phi_3 = -1/2\,\varepsilon$$

gilt, wo $\phi_1$ der Winkel zwischen $\xi$ und $\eta$, $\phi_2$ der zwischen $\eta$ und $\mathfrak{y}$, $\phi_3$ der zwischen $\xi$ und $\eta$ ist.

(**B**)

$$(1) \qquad \mathfrak{a} + \lambda\mathfrak{x}$$

bezeichnet die Kreisscharen auf einer festen Kugel $\mathfrak{a}$ in $R_n$, wo $\mathfrak{x}$ eine veränderliche Kugeln in $R_n$ und $\lambda$ ein Parameter ist.

$$(2) \qquad \mathfrak{a} + \lambda\mathfrak{x} + \mu\mathfrak{y}$$

bedeutet zwei Kurven auf einer festen Kugel $\mathfrak{a}$ in $R_n$, wo $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ zwei Kugeln in $R_n$, $\lambda$ und $\mu$ zwei Parameter sind.

Ist die Kugel $\mathfrak{y}$ auf $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{x}$ senkrecht, so folgt aus (1)

$$(3) \qquad (\mathfrak{a}\mathfrak{y}) + \lambda(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = 0\,,$$

so wird aus (1)

$$(4) \qquad \mathfrak{a} - (\mathfrak{a}\mathfrak{y})/(\mathfrak{x}\mathfrak{y})\cdot\mathfrak{x}\,.$$

(4) bezeichnet die Kreisscharen auf $\mathfrak{a}$, die auf $\mathfrak{y}$ senkrecht sind.

Weiter kann man bezüglich (2) untersuchen wie oben. Geht die Ebene des Kreises $\{\mathfrak{x}, \mathfrak{a}\}$ zu dem Zetrium einer festen Kugel $\mathfrak{a}$ in $R_n$, so bezeichnet (1) einen Gröszkreis auf $\mathfrak{a}$.

Von (2) gilt das gleiche.

(**C**) Wir betrachten

$$(1) \qquad \mathfrak{x} = \xi - (\xi\eta)\,\eta - \eta + (\xi\eta)\,\xi$$

oder

$$\mathfrak{x} = \{\xi - \eta\}\,\{1 + (\xi\eta\}\,,$$

so folgt

$$(2) \qquad (\mathfrak{x}\xi) = 0,$$

$$(3) \qquad (\mathfrak{x}\eta) = 0$$

und

$$(4) \qquad (\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = 0,$$

wo $\xi$ und $\eta$ zwei Kreise in $R_2$ sind. Da gilt $(\xi\eta)^2 = 1$.

Aus (2), (3) und (4) sieht man, dasz $\mathfrak{x}$ der Berührungspunkt zweier Kreise $\xi$ und $\eta$ ist.

Von

$$\mathfrak{x} = \{\xi + \eta\} \{1 - (\xi\eta)\}$$

gilt das gleiche, d. h. es gelten

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = 0, \quad (\mathfrak{x}\xi) = 0, \quad (\mathfrak{x}\eta) = 0.$$

(**D**) Im folgenden möchten wir uns mit einer Fläche F in $R_n$ beschäftigen, die mit $r$ Kreisen

$$(1) \qquad {}_{(p)}\mathfrak{x}^{\alpha} \qquad [\alpha=\mathrm{I}, \mathrm{II}, \quad p=1, 2, \cdots, r]$$

bestimmt wird, wo $\mathfrak{x}^{\alpha}$ die Kugeln in $R_n$ bedeuten.

Wir können durch eine neue Fläche F*

$$(2) \qquad {}_{(p)}\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha} = \sum_{\beta=\mathrm{I}}^{\mathrm{II}} c^{\alpha}_{\beta}\, {}_{(p)}\mathfrak{x}^{\beta}$$

als Linearkombinationen der ${}_{(p)}\mathfrak{x}^{\alpha}$ mit Koeffizienten $c^{\alpha}_{\beta}$ einführen und dann ebensogut durch die ${}_{(p)}\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha}$ unsere Fläche F* darstellen.

Ein Ausdruck

$$(3) \qquad \underbrace{{}_{(p)}\mathfrak{x}^{\alpha},\ {}_{(p)}\mathfrak{x}^{\alpha},\ {}_{(p)}\mathfrak{x}^{\alpha},\ \cdots}_{n} \qquad [\alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}]$$

bezeichnet $n$ Flächen von F.

Weiter kann man untersuchen wie in meiner Arbeit[1].

Betrachten wir

$$(4) \qquad {}_{(p)}\mathfrak{x}^{\alpha} \qquad [\alpha=\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \quad p=1, 2, \cdots, r]$$

anstatt (1), so kann man untersuchen wie oben.

---

(1) NAKAZIMA, S.: Differentialgeo. der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ. Vol. 34 (1931), S. 198.

(4) bezeichnet eine Fläche, die durch $n$ Geraden bestimmt wird.

(**E**) Wir betrachten drei Kugeln

(1) $\quad {}_{(i)}\bar{\mathfrak{x}} \cdot \quad [i = 1, 2, 3]$

in $R_3$, die die Schhittpunkte $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ dreier Kugeln

(2) $\quad {}_{(i)}\mathfrak{x} \quad [i = 1, 2, 3]$

in $R_3$ hindurchgehen; man kann setzen

$$(3) \quad \begin{cases} \rho\, {}_{(1)}\bar{\mathfrak{x}} = a_{11}\, {}_{(1)}\mathfrak{x} + a_{12}\, {}_{(2)}\mathfrak{x} + a_{13}\, {}_{(3)}\mathfrak{x}\,, \\ \rho\, {}_{(2)}\bar{\mathfrak{x}} = a_{21}\, {}_{(1)}\mathfrak{x} + a_{22}\, {}_{(2)}\mathfrak{x} + a_{23}\, {}_{(3)}\mathfrak{x}\,, \\ \rho\, {}_{(3)}\bar{\mathfrak{x}} = a_{31}\, {}_{(1)}\mathfrak{x} + a_{32}\, {}_{(2)}\mathfrak{x} + a_{33}\, {}_{(3)}\mathfrak{x}\,, \end{cases}$$

wo $a_{ij}$ skalare Gröszen, $\rho$ einen Proportionalitätsfaktor bedeutet.

Aus (3) folgt

$$(4) \quad \begin{cases} (a_{11} - \rho)\, {}_{(1)}\mathfrak{x} + a_{12}\, {}_{(2)}\mathfrak{x} + a_{13}\, {}_{(3)}\mathfrak{x} = 0\,, \\ a_{21}\, {}_{(1)}\mathfrak{x} + (a_{22} - \rho)\, {}_{(2)}\mathfrak{x} + a_{23}\, {}_{(3)}\mathfrak{x} = 0\,, \\ a_{31}\, {}_{(1)}\mathfrak{x} + a_{32}\, {}_{(2)}\mathfrak{x} + (a_{33} - \rho)\, {}_{(3)}\mathfrak{x} = 0\,, \end{cases}$$

daraus ergibt sich

$$(5) \quad \begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \rho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \rho \end{vmatrix} = 0\,.$$

Wenn $a_{ij}$ gegeben sind, so ergibt sich aus (5) $\rho$.

Die Gleichung

$$(6) \quad \Delta(\rho) = \begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \rho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \rho \end{vmatrix} =$$

ist gegenüber Transformationen der Form

(7) $\quad {}_{(r)}\mathfrak{x} = \sum p_{rs}\, {}_{(s)}\mathfrak{y}$

invariant.

Wenn

$$(8)\quad \begin{cases} a_{11}\,{}_{(1)}\mathfrak{x} + a_{12}\,{}_{(2)}\mathfrak{x} + a_{13}\,{}_{(3)}\mathfrak{x} = \mu\,\{a_{11}\,{}_{(1)}\mathfrak{x} + a_{21}\,{}_{(2)}\mathfrak{x} + a_{31}\,{}_{(3)}\mathfrak{x}\}, \\ a_{21}\,{}_{(1)}\mathfrak{x} + a_{22}\,{}_{(2)}\mathfrak{x} + a_{23}\,{}_{(3)}\mathfrak{x} = \mu\,\{a_{12}\,{}_{(1)}\mathfrak{x} + a_{22}\,{}_{(2)}\mathfrak{x} + a_{32}\,{}_{(3)}\mathfrak{x}\}, \\ a_{31}\,{}_{(1)}\mathfrak{x} + a_{22}\,{}_{(2)}\mathfrak{x} + a_{33}\,{}_{(3)}\mathfrak{x} = \mu\,\{a_{13}\,{}_{(1)}\mathfrak{x} + a_{23}\,{}_{(2)}\mathfrak{x} + a_{33}\,{}_{(3)}\mathfrak{x}\} \end{cases}$$

gilt, kommt folglich zustande

$$(9)\quad \begin{vmatrix} a_{11}-\mu a_{11} & a_{12}-\mu a_{21} & a_{13}-\mu a_{31} \\ a_{21}-\mu a_{12} & a_{22}-\mu a_{22} & a_{23}-\mu a_{32} \\ a_{31}-\mu a_{13} & a_{32}-\mu a_{23} & a_{33}-\mu a_{33} \end{vmatrix} = 0 .$$

Wenn $a_{ij}$ gegeben sind, so kann man aus (9) $\mu$ finden.

## ( 7 )

Im folgenden möchten wir $n$ Punkte in $R_3$ untersuchen.

Wir bezeichnen $n$ Punkte in $R_3$ mit

$$(1)\quad \mathfrak{x}^{\alpha} \quad [\alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \ldots, n].$$

Wir können $n$ neue Punkte

$$(2)\quad \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha} = \sum_{\beta=\mathrm{I}}^{n} c^{\alpha}_{\beta}\, \mathfrak{x}^{\beta} \qquad [\alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \ldots, n]$$

als Linearkombinationen der $\mathfrak{x}^{\iota}$ einführen mit Koeffizienten $c^{\alpha}_{\beta}$, deren Determinante $|c^{\alpha}_{\beta}| \neq 0$ sein muss, wenn $\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\mathrm{I}}$, $\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\mathrm{II}}$, ... und $\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{n}$ nicht proportional werden sollen, und dann ebensogut durch die $\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha}$ unsern Punkt darstellen.

Soll ein Ausdruck in den

$$(3)\quad \mathfrak{x}^{\alpha}, \mathfrak{y}^{\alpha}, \mathfrak{z}^{\alpha}, \ldots \ \text{u. s. w.,} \qquad [\alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \ldots, n],$$

mit deren Hilfe wir eine Anzahl von Punkten festlegen, nur von der geometrischen Figur der Punkte anhängen, nicht aber von den sie festlegeden Punkten, so muss er unverändert bleiben bei Substitutionen der Art (2).

Wir wollen (2) die Büscheltransformationen des Punktes $\mathfrak{p}$ nennen.

Bilden wir das System der Skalarprodukte

$$(4) \qquad (\mathfrak{x}^\alpha \mathfrak{x}^\beta) = A^{\alpha\beta},$$

so haben wir in $A^{\alpha\beta}$ ein Grössensystem, das sich nach (2) in folgender Weise substituiert:

$$(5) \qquad \overset{*}{A}{}^{\alpha\beta} = c^\alpha_\beta c^\beta_\delta A^{\gamma\delta} \; [\overset{*}{A}{}^{\alpha\beta} = (\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^\alpha \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^\beta)].$$

Hier laufen alle Indizes von I bis $n$, und es ist über $n$ vorkommende Indizes auf der rechten Seite zu summieren.

Hier wie im folgenden oft wollen wir die Summenzeichen weglassen.

Für das Verhalten der Grössen gegenüber den linearen Büscheltransformationen (2) wollen wir die üblichen Bezeichnungen der Tensorrechnung einführen.

Bei Gruppen linearer Transformationen bilden bekanntlich die Grössen und Grössensysteme von gewissen leicht übersehbaren Transformationseigenschaften, die Vektoren und Tensoren das naturgemässe Durchgangsstadium zur Bildung von Invarianten.

Ein System von $n$ zusammengehörigen Grössen $X^{\mathrm{I}}$, $X^{\mathrm{II}}$, $X^{\mathrm{N}}$ bildet einen kontravarianten Vektor $X^\alpha$, wenn bei einer Büscheltransformation aus den $X^\alpha$ neue Grössen $\overset{*}{X}{}^\alpha$ hervorgehen, die mit den $X^\alpha$ durch die Substitutionsformeln

$$(6) \qquad \overset{*}{X}{}^\alpha = c^\alpha_\beta X^\beta \qquad [\alpha, \beta = \mathrm{I}, \mathrm{II}]$$

zusammenhängen.

$n$ Grössen $Y_\alpha$ bezeichnen wir als einen kovarianten Vektor, wenn sie sich nach

$$(7) \qquad Y_\alpha = c^\beta_\alpha Y^*_\beta$$

transformieren, wo jetzt im Gegensatz zu (6) rechts die $Y^*$, links die $Y$ stehen.

Die $Y_\alpha$ transformieren sich also entgegengesetzt, „*kontragredient*" in die $X^\alpha$.

Bei kovarianten Vektoren schreiben wir die Indizes unten, bei kontravarianten oben.

Wenn $\mathfrak{z}$ als ein geometrisch fest bestimmter Punkt von den Büscheltransformationen nicht abhängt, so muss er in beiden Darstellungen dieselben Koordinaten haben, also

$$(8) \qquad \mathfrak{z} = \rho_\alpha \mathfrak{x}^\alpha = \overset{*}{\rho}_\alpha \overset{*}{\mathfrak{x}}^\alpha .$$

Setzt man $\overset{*}{\mathfrak{x}}^\alpha$ aus (2) ein, so erhält man

$$(9) \qquad \rho_\alpha = c_\alpha^\beta \overset{*}{\rho}_\beta ,$$

die $\rho_\alpha$ bilden also einen kovarianten Vektor.

Wir haben schon die Bezeichnung Vektor gekannt.

Dort bezog sie sich auf die Gruppen der orthogonalen Substitutionen im Raum und die aus ihnen resultierenden MÖBIUSschen und LAGUERREschen Transformationen.

Jene Vektoren sind nicht mit den hier definierten zu verwechseln.

Der Begriff Vektor hat nur eine Bedeutung in Bezug auf eine bestimmte Gruppe linearer Transformationen, deshalb wollen wir die soeben definierten Vektoren auch als Büschelvektoren bezeichnen.

Man nennt die Vektoren auch Tensoren erster Stufe.

Als einen kontravarianten Tensor zweiter Stufe bezeichnen wir ein System von $4 = 2^2$ (allgemein $n^2$) Grössen, das sich transformiert wie die $A^{\alpha\beta}$ in (5).

Als einen kovarianten Tensor zweiter Stufe bezeichnen wir ein Grössensystem $Z_{\alpha\beta}$, für das die Formeln

$$(10) \qquad Z_{\alpha\beta} = c_\alpha^\gamma c_\beta^\delta \overset{*}{Z}_{\gamma\delta}$$

gelten, das sich also „*umgekehrt*" wie das System $A^{\alpha\beta}$ substituiert, was wieder in der Schreibweise der unteren Indizes zum Ausdruck kommt.

Analog lassen sich Tensoren höherer Stufen mit mehr als zwei Indizes definieren.

Für einen kontravarianten Tensor $n$-ter Stufe $W^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}$ gilt

$$(11) \qquad \overset{*}{W}{}^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n} = c_{\beta_1}^{\alpha_1} c_{\beta_2}^{\alpha_2} \cdots c_{\beta_m}^{\alpha_n} W^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_n}$$

und für einen kovarianten $V_{\alpha_1\alpha\ldots\alpha_n}$ gilt aber

$$(12) \qquad V_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = c^{\beta_1}_{\alpha_1} c^{\beta_2}_{\alpha_2} \cdots c^{\beta_n}_{\alpha_n} \overset{*}{V}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}.$$

Die Zweckmässigkeit der Einführung der Grössen mit den Transformationseigenschaften der Tensoren, sowie die der verwandten Schreibweise beruht nun darauf, dass von den Tensoren zur Bildung von Invarianten nur ein müheloser Schritt ist.

Es gilt nämlich der Satz: Multiplizieren wir einen kontravarianten Tensor mit einem kovarianten von gleicher Stufenzahl und lassen jeden oberen Index mit je einem unteren zusammenfallen und summieren über all Paare, so entsteht eine Invariante. z. B. gilt:

$$(13) \qquad \overset{*}{Z}_{\alpha\beta} \overset{*}{X}^{\alpha} \overset{*}{Y}^{\beta} = Z_{\alpha\beta} X^{\alpha} Y^{\beta}$$

wo $Z_{\alpha\beta}$ ein kovarianter Tensor zweiter Stufe ist und $X^{\alpha}$, $Y^{\alpha}$ kontravariante Vektoren sind.

Das Produkt $X^{\alpha} Y^{\beta}$ ist als kontravarianter Tensor zweiter Stufe aufzufassen, denn für das Produkt gilt die Transformationsformel (5).

Die Richtigkeit der Gleichung (13) folgt unmitelbar, wenn wir $\overset{*}{Z}_{\alpha\beta}$ nach (10) unn $\overset{*}{X}^{\alpha}$ sowie analog $\overset{*}{Y}^{\alpha}$ nach (6) durch die rechten Seiten dieser Gleichungen ersetzen. Ganz ebensogut beweist man den Satz für Tensoren beliebiger Stufe.

Um zu unserer Geometrie der Punkte zurückzukommen, bemerken wir, dass für den unserm Punkt $\mathfrak{p}$ gehörigen Tensor $A^{\alpha\beta}$ nach (4) die Symmetriebedingung

$$(14) \qquad A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha}$$

gilt und dass sich ferner die Determinante

$$(15) \qquad A = |A^{\alpha\beta}|$$

nach

$$(16) \qquad A^{*} = |c^{\alpha}_{\beta}|^{2} \cdot A$$

substituiert.

Wollen wir nun einen eigentlichen reellen Punkt haben, so müssen wir die Determinante

$$(17) \qquad A > 0$$

voraussetzen, eine Bedingung, die nach (16) invariant ist.

Nun wollen wir neben dem Grössensystem $A^{\alpha\beta}$ ein anderes, gleichfalls symmetrisches $A_{\alpha\beta}$ einführen, das wir mit unteren Indizes anschreiben:

$$(18)\qquad A^{ij}A_{kj} = \delta^i_k = \begin{cases} 1 & \text{für } k = j, \\ 0 & \phantom{\text{für }} k \neq j, \end{cases}$$

wobei

$$(19)\qquad A = \begin{vmatrix} \mathfrak{x}^{\mathrm{I}}\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}, & \mathfrak{x}^{\mathrm{I}}\mathfrak{x}^{\mathrm{II}}, & \cdots, & \mathfrak{x}^{\mathrm{I}}\mathfrak{x}^{n} \\ \mathfrak{x}^{\mathrm{II}}\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}, & \mathfrak{x}^{\mathrm{II}}\mathfrak{x}^{\mathrm{II}}, & \cdots, & \mathfrak{x}^{\mathrm{II}}\mathfrak{x}^{n} \\ \cdots\cdots\cdots & & & \\ \mathfrak{x}^{n}\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}, & \mathfrak{x}^{n}\mathfrak{x}^{\mathrm{II}}, & \cdots, & \mathfrak{x}^{n}\mathfrak{x}^{n} \end{vmatrix}$$

sich aus den $A^{\alpha\beta}$ bestimmt.

Es gilt dann

$$(20)\qquad A^{\alpha\beta}A_{\beta\gamma} = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha = \gamma, \\ 0 & \phantom{\text{für }} \alpha \neq \gamma, \end{cases}$$

und ferner

$$(21)\qquad \tfrac{1}{2}A^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta} = 1\,.$$

Weiter kann man untersuchen wie in meiner Arbeit[1].

## ( 8 )

$\mathfrak{x}^{\bar{\alpha}}$ bezeichnet eine Figur (F), die aus $p$ Geraden und $q$ Kreisen in $R_3$ besteht, wo $\mathfrak{x}$ die Kugel in $R_3$ bezeichnet.

Da $\bar{\alpha} = 3p + 2q$ ist.

Wir können eine neue (F)

$$(1)\qquad \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha} = \sum_{\beta=\mathrm{I}}^{\bar{\alpha}} c^{\alpha}_{\beta}\,\mathfrak{x}^{\beta} \qquad [\alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \ldots, (3p+2q)]$$

als Linearkombinationen der $\mathfrak{x}^{\alpha}$ einführen mit Koeffizienten $c^{\alpha}_{\beta}$, deren

(1) NAKAZIMA, S.: Differentialgeo. der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ. Vol. 34 (1931), S. 197.

Determinante $|c^{\alpha}_{\beta}| \neq 0$ sein muss, wenn $\overset{*}{\mathfrak{x}}^{\mathrm{I}}, \overset{*}{\mathfrak{x}}^{\mathrm{II}}, \dots$ und $\overset{*}{\mathfrak{x}}^{3p+2q}$ nicht proportional werden sollen, und können dann ebensogut durch die $\overset{*}{\mathfrak{x}}^{\alpha}$ unsere (F) darstellen.

Soll ein Ausdruck in

$$(2) \qquad \mathfrak{x}^{\alpha},\ \mathfrak{y}^{\alpha},\ \mathfrak{z}^{\alpha},\ \dots \quad \text{u. s. w.} \qquad [\alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \dots, (3p+2q)],$$

mit deren Hilfe wir eine Anzahl von (F) festlegen, nur von der geometrischen Figur der (F) abhängen, nicht aber von den sie festlengenden Kugeln, so muss er ubverändert bleiben bei Substitutionen von der Art (1).

Dabei werden wir für die verschiedenen (F) Substitutionen (1) mit verschiedenen Koeffizientensystemen $c^{\alpha}_{\beta}$ haben.

Wir wollen (1) auch die Büscheltransformationen der (F) nennen.

Wir betrachten zunächst eine (F) $\mathfrak{x}^{\alpha}$.

Bilden wir das System der Skalarprodukte

$$(3) \qquad (\mathfrak{x}^{\alpha}\mathfrak{x}^{\beta}) = A^{\alpha\beta},$$

so haben wir in $A^{\alpha\beta}$ ein Grössensystem, das sich in folgender Weise substituiert:

$$(4) \qquad \overset{*}{A}{}^{\alpha\beta} = c^{\alpha}_{\beta}\, c^{\beta}_{\delta}\, A^{\gamma\delta} \qquad [\overset{*}{A}{}^{\alpha\beta} = (\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha}\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\beta})].$$

Hier laufen alle Indizes von I bis $3p+2q$ und es ist über $3p+2q$ Indizes auf der rechten Seite zu summieren.

Wenn $\mathfrak{z}$ als eine geometrisch fest bestimmte Kugel von den Büscheltransformationen nicht abhängt, so muss sie in beiden Darstellungen dieselben Koordinaten haben, also

$$(5) \qquad \mathfrak{z} = \rho_{\alpha}\mathfrak{x}^{\alpha} = \overset{*}{\rho}_{\alpha}\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha}.$$

Setzt man $\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha}$ aus (1) ein, so erhält man

$$\rho_{\alpha} = c^{\alpha}_{\beta}\, \overset{*}{\rho}_{\beta}$$

die $\rho_{\alpha}$ bilden also einen kovarianten Vektor.

Man erhält:

$$(6) \qquad A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha}, \quad A^{*} = |c^{\alpha}_{\beta}|^{2}\cdot A, \quad A = |A^{\alpha\beta}|.$$

Weiter betrachten wir zwei (F) und $(\tilde{\mathrm{F}})$, die durch die beiden

Kugelpaare $\tilde{\mathfrak{x}}^\alpha$ und $\tilde{\mathfrak{x}}^\lambda$ $[\alpha, \lambda = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \ldots (3p+2q)]$ dargestellt sind.

Wir definieren (3) analog $\tilde{\mathrm{A}}^{\lambda\mu} = (\tilde{\mathfrak{x}}^\lambda \tilde{\mathfrak{x}}^\mu)$ mit $\tilde{\mathrm{A}}^{\lambda\mu} = \tilde{\mathrm{A}}^{\mu\lambda}$ und setzen $\mathrm{A} = |\tilde{\mathrm{A}}^{\lambda\mu}| > 0$ voraus.

Dann haben wir für $(\tilde{\mathrm{F}})$ die Büscheltransformationen

$$(7) \qquad \overset{*}{\tilde{\mathfrak{x}}}{}^\lambda = c^\lambda_\mu \mathfrak{x}^\mu$$

zu berücksichtigen. Die $\tilde{c}^\lambda_\mu$ in (7) sind aber von den $c^\alpha_\beta$ in (1) völlig unabhängige neue Grössen.

Wir schliessen nun den Fall aus, dass die Matrix

$$(8) \qquad \| \mathfrak{x}^{\mathrm{I}}, \mathfrak{x}^{\mathrm{II}}, \ldots, \mathfrak{x}^{(3p+2q)}, \tilde{\mathfrak{x}}^{\mathrm{I}}, \tilde{\mathfrak{x}}^{\mathrm{II}}, \ldots, \tilde{\mathfrak{x}}^{(3p+2q)} \| \equiv 0$$

ist, in der eine lineare Beziehung der Form

$$(9) \qquad \sigma_\alpha \tilde{\mathfrak{x}}^\alpha = \tilde{\sigma}_\lambda \tilde{\mathfrak{x}}^\lambda$$

besteht.

Die Bedeutung von (9) ist aber die, dass es eine

$$\mathfrak{z} = \sigma_\alpha \mathfrak{x}^\alpha = \tilde{\sigma}_\lambda \tilde{\mathfrak{x}}^\lambda$$

gibt.

Weiter kann man untersuchen wie in meiner Arbeit[1].

## ( 9 )

Im folgenden möchten wir uns den Dreiecken im $R_3$ widmen.

Wir betrachten drei Punkte

$$(1) \qquad \mathfrak{x}^a \quad [a = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}]$$

im $R_3$. (1) bezeichnet einen Dreieck in $R_3$.

Wir können einen neuen Dreieck

$$(2) \qquad \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^\alpha = \sum_{\beta=\mathrm{I}}^{\mathrm{III}} c^\alpha_\beta \mathfrak{x}^\alpha \qquad [\alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}]$$

als Linearkombinationen der $\mathfrak{x}^a$ einführen mit Koeffizienten $c^\alpha_\beta$, deren Determinante $|c^\alpha_\beta| \neq 0$ sein muss, wenn $\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\mathrm{I}}, \overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\mathrm{II}}$ und $\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\mathrm{III}}$ nicht propor-

(1) NAKAZIMA, S.: Differentialgeometrie der Hyperboloidscharen, Zyklidenscharen und Kurvenpaaren, Tôhoku Math. Journ. 31 (1929), S. 227.

tional werden sollen, und könnsn dann ebensogut durch die $\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha}$ unsern Dreieck darstellen.

Weiter kann man mit

$$(3) \qquad \mathfrak{x}^{\alpha},\ \mathfrak{y}^{\alpha},\ \mathfrak{z}^{\alpha},\ \cdots \qquad [\alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}]$$

die Dreiecke in $R_3$ bezeichnen.

Wir werden zunächst einen Dreieck $\mathfrak{x}^{\alpha}$ betrachten.

Bilden wir das System der Skalarprodukte

$$(4) \qquad (\mathfrak{x}^{\alpha}\mathfrak{x}^{\beta}) = A^{\alpha\beta},$$

so haben wir in $A^{\alpha\beta}$ ein Gröszensystem, das sich nach (2) in folgender Weise substitniert:

$$(5) \qquad \overset{*}{A}{}^{\alpha\beta} = c^{\alpha}_{\gamma}\, c^{\beta}_{\delta}\, A^{\gamma\delta} \qquad [\overset{*}{A}{}^{\alpha\beta} = (\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha}\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\beta})].$$

Hier laufen alle Indizes von I bis III und es ist über tripelt vorkommende Indizes auf der rechten Seite zu summieren.

Nach (4) kann man setzen

$$(6) \qquad A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha}$$

und nehmen an, dass sich ferner die Determinante

$$(7) \qquad A = |A^{\alpha\beta}|$$

nach

$$(8) \qquad A^{*} = |c^{\alpha}_{\beta}|^{2} \cdot A$$

substituiert.

Wollen wir der Natur der Sache gemäss einen eigentlichen rellen Dreieck haben, so müssen wir für die Determinante

$$(9) \qquad A > 0$$

voraussetzen, eine Bedingung, die nach (8) invariant ist.

Nun wollen wir neben dem Grössensystem $A^{\alpha\beta}$ ein anderes, gleichfalls symmetrisches $A_{\alpha\beta}$ einführen, das wir mit unteren Indizes anschreiben:

$$
(10)\quad \begin{cases} A_{11} = 1/A \cdot (A^{22}A^{33} - A^{23}A^{32}), & A_{12} = 1/A \cdot (A^{31}A^{23} - A^{21}A^{33}), \\ A_{13} = 1/A \cdot (A^{21}A^{32} - A^{31}A^{22}), & A_{22} = 1/A \cdot (A^{11}A^{33} - A^{31}A^{13}), \\ A_{23} = 1/A \cdot (A^{11}A^{32} - A^{12}A^{31}), & A_{33} = 1/A \cdot (A^{11}A^{22} - A^{12}A^{21}), \end{cases}
$$

wobei sich

$$
(11)\qquad A = \begin{vmatrix} \mathfrak{x}^{\mathrm{I}}\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}, & \mathfrak{x}^{\mathrm{I}}\mathfrak{x}^{\mathrm{II}}, & \mathfrak{x}^{\mathrm{I}}\mathfrak{x}^{\mathrm{III}} \\ \mathfrak{x}^{\mathrm{II}}\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}, & \mathfrak{x}^{\mathrm{II}}\mathfrak{x}^{\mathrm{II}}, & \mathfrak{x}^{\mathrm{II}}\mathfrak{x}^{\mathrm{III}} \\ \mathfrak{x}^{\mathrm{III}}\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}, & \mathfrak{x}^{\mathrm{III}}\mathfrak{x}^{\mathrm{II}}, & \mathfrak{x}^{\mathrm{III}}\mathfrak{x}^{\mathrm{III}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ A^{31} & A^{32} & A^{33} \end{vmatrix}
$$

nach dem $A^{\alpha\beta}$ bestimmt.

Es gilt dann

$$
(12)\qquad A^{\alpha\beta} A_{\beta\gamma} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \alpha = \gamma, \\ 0 & \text{,,} \quad \alpha \neq \gamma, \end{cases}
$$

und ferner

$$
(13)\qquad \tfrac{1}{2} A^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} = 1 .
$$

Aus der Invarianz der linken Seite von (13) ersieht man, dass $A_{\alpha\beta}$ ein kovarianter Tensor ist.

Man nennt ihn den zu $A^{\alpha\beta}$ reziproken Tensor.

Da die Tensoren $A^{\alpha\beta}$, $A_{\alpha\beta}$ eine wichtige Rolle spielen werden, wollen wir uns folgender Schreibweise bedienen.

Haben wir einen kontravarianten Vektor $X^\alpha$ definiert, so schreiben wir

$$
(14)\qquad X_\alpha \quad \text{für} \quad A_{\alpha\beta} X^\beta
$$

und nennen $X_\alpha$ den zu $X^\alpha$ gehörigen kovarianten Vektor.

In der Tat ist $X_\alpha$ ein solcher, dann gilt es nach (2) und (5)

$$
(15)\qquad A_{\alpha\beta} X^\beta = c_\alpha^\gamma c_\beta^\delta \overset{*}{A}_{\gamma\delta} X^\beta = c_\alpha^\gamma \overset{*}{A}_{\gamma\delta} \overset{*}{X}^\delta .
$$

Ebenso gehört zu $Y_\alpha$ der zugehörige kontravariante Vektor

$$
(16)\qquad Y^\alpha = A^{\alpha\beta} Y_\beta .
$$

Überhaupt werden wir uns bei Tensoren höherer Stufe der Schreibweise des Herauf-und Herunterziehens der Indizes mit Hilfe von $A^{\alpha\beta}$ und $A_{\alpha\beta}$ bedienen.

Also z. B.

(17) $\quad W^{\alpha}_{\cdot\beta} = A^{\alpha\tau} W_{\tau\beta}$

und

(18) $\quad W^{\alpha\delta} = A^{\alpha\tau} A^{\beta\delta} W_{\tau\beta}$.

In (17) schreiben wir unter $\alpha$ einen Punkt, um anzudeuten, dass der erste Index heraufgezogen ist.

Während wir das Grössensystem der Art (17), das teils obere, teils untere Indizes trägt, einfach nur als stenographische Abkürzungen betrachten wollen, können wir für solche der Art (18), bei denen alle Indizes herauf-resp. heruntergeholt sind, in Übereinstimmung mit der bisherigen Schreibweise zeigen, dass sie wieder kontra-resp. kovariante Tensoren sind.

Wir betrachten zwei Arten von Dreieck:

(19) $\quad \mathfrak{x}^{\alpha}$ und $\tilde{\mathfrak{x}}^{\lambda} \quad [\alpha, \lambda = \mathrm{I, II, III}]$.

Wir definieren $A^{\alpha\beta}$ analog

(20) $\quad \tilde{A}^{\lambda\mu} = (\tilde{\mathfrak{x}}^{\lambda}\tilde{\mathfrak{x}}^{\mu})$ mit $\tilde{A}^{\lambda\mu} = \tilde{A}^{\mu\lambda}$

und setzen

(21) $\quad A = |A^{\alpha\beta}| > 0, \quad \tilde{A} = |\tilde{A}^{\lambda\mu}| > 0$

voraus. Dann haben wir für $\tilde{\mathfrak{x}}^{\mu}$ die Büscheltransformationen

(22) $\quad \overset{*}{\tilde{\mathfrak{x}}} = \tilde{c}^{\lambda}_{\mu} \mathfrak{x}^{\mu}$

zu berücksichtigen.

$\tilde{c}^{\alpha}_{\beta}$ und $\tilde{c}^{\lambda}_{\mu}$ sind voneinander völlig unabhängige Gröszen.

Wir setzen nun

(23) $\quad S^{\alpha\lambda} = (\mathfrak{x}^{\alpha}\tilde{\mathfrak{x}}^{\lambda})$,

dann ist $S^{\alpha\lambda}$ ein *„gemischter"* Tensor und transformiert sich nach

(24) $\quad \overset{*}{S}{}^{\alpha\lambda} = c^{\alpha}_{\beta}\tilde{c}^{\lambda}_{\mu} S^{\beta\mu}$.

Wenn

(25) $\quad \| \mathfrak{x}^{\mathrm{I}}, \mathfrak{x}^{\mathrm{II}}, \mathfrak{x}^{\mathrm{III}}, \tilde{\mathfrak{x}}^{\mathrm{I}}, \tilde{\mathfrak{x}}^{\mathrm{II}}, \tilde{\mathfrak{x}}^{\mathrm{III}} \| = 0$

ist, dann gilt eine lineare Beziehung der Form

$$(26) \qquad \sigma_\alpha \mathfrak{x}^\alpha = \tilde{\sigma}^\lambda \tilde{\mathfrak{x}}^\lambda ;$$

Die Bedeutung (26) sagt aus, dass es einen Dreieck

$$(27) \qquad \mathfrak{z} = \sigma_\alpha \mathfrak{x}^\alpha = \tilde{\sigma}_\lambda \tilde{\mathfrak{x}}^\lambda$$

gibt, d. h. $\sigma_\alpha \mathfrak{x}^\alpha$ und $\tilde{\sigma}_\lambda \tilde{\mathfrak{x}}^\lambda$ voneinander abhängig sind.

Fallen zwei Dreieicke

$$(28) \qquad \vartheta = \sigma_\alpha \mathfrak{x}^\alpha \quad \text{und} \quad f = \tilde{\sigma}_\lambda \tilde{\mathfrak{x}}^\lambda$$

miteinander zusammen, so folgt

$$(29) \qquad (\sigma_\alpha \tilde{\mathfrak{x}}^\alpha, \tilde{\sigma}_\lambda \mathfrak{x}^\lambda) = 0 ,$$

d. h.

$$(30) \qquad \sigma_\alpha \tilde{\sigma}_\lambda (\mathfrak{x}^\alpha \tilde{\mathfrak{x}}^\lambda) = 0 ,$$

$$(31) \qquad \sigma_\alpha \tilde{\sigma}_\lambda S^{\alpha\lambda} = 0 ;$$

daraus ist herzuleiten cer folgende

**Satz:** $S^{\alpha\lambda}$ *bedeutet, dass zwei Dreiecke miteinander zusammenfallen und dass alle* $\sigma_\alpha$ *und* $\tilde{\sigma}_\lambda$ *verschieden sind.*

Gilt (25) nicht, so sind sechs Punkte voneinander linear unabhängig.

Diese werden aber alle durch die drei Tensoren

$$(32) \qquad A^{\alpha\beta}, \quad \tilde{A}^{\lambda\mu}, \quad S^{\alpha\lambda}$$

gegeben.

Wenn drei Ecken $\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{x}^{\mathrm{II}}$, $\mathfrak{x}^{\mathrm{III}}$ eines Dreickes auf einer Gerade liegen, so folgt

$$(33) \qquad 0 = \alpha \mathfrak{x}^{\mathrm{I}} + \beta \mathfrak{x}^{\mathrm{II}} + \gamma \mathfrak{x}^{\mathrm{III}} ,$$

wo $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ irgendwelche „*skalare*" Zahlen sind.

Schreiben wir einen Kreis $\mathfrak{y}$ in einen Dreieck $\mathfrak{x}^\alpha$ um, so haben wir

$$(34) \qquad \mathfrak{x}^\alpha \mathfrak{y} = 0$$

Weiter besteht

$$(35) \qquad \mathfrak{x}^\alpha \mathfrak{x}^\beta = \begin{cases} 1 & \text{tür} \quad \alpha \neq \beta , \\ 0 & \quad " \quad \alpha = \beta , \end{cases}$$

wenn

$$\overline{\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}\mathfrak{x}^{\mathrm{II}}} = \overline{\mathfrak{x}^{\mathrm{II}}\mathfrak{x}^{\mathrm{III}}} = \overline{\mathfrak{x}^{\mathrm{III}}\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}} \tag{36}$$

in $\Delta\, \mathfrak{x}^{\mathrm{I}}\mathfrak{x}^{\mathrm{II}}\mathfrak{x}^{\mathrm{III}}$ gilt. Sind $\mathfrak{x}^{\alpha}\mathfrak{y} = 0$ und $\mathfrak{x}^{\alpha}\mathfrak{z} = 0$, so folgt $\mathfrak{y} \equiv \mathfrak{z}$, wo $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Kugeln und $\mathfrak{x}^{\alpha}$ die Punkte in $R_3$ sind.

Ist $\mathfrak{k}$ ein Kreis und

$$\mathfrak{x}^{\alpha} \qquad [\alpha = \mathrm{I, II, III}] \tag{37}$$

ein Dreieck, so ist

$$\mathfrak{y}^{\alpha} = 2(\mathfrak{x}^{\alpha}\mathfrak{k})\mathfrak{k} - \mathfrak{x}^{\alpha} \tag{38}$$

der zu $\mathfrak{x}^{\alpha}$ in bezug auf den Kreis $\mathfrak{k}$ inverse Dreieck.

Wenn jede Ecke des $\Delta\, \mathfrak{x}^{\mathrm{I}}\mathfrak{x}^{\mathrm{II}}\mathfrak{x}^{\mathrm{III}}$ auf jeder Kurven in $R_3$ liegt, so kann man setzeß

$$\mathfrak{x}^{\alpha} = \mathfrak{x}^{\alpha}(t) \qquad [\alpha = \mathrm{I, II, III}]. \tag{39}$$

Da ist es klar, dass

$$(\mathfrak{x}^{\alpha}\mathfrak{x}^{\beta}) \tag{40}$$

invariant ist bei der Parametertransformation

$$t = f(\bar{t}), \tag{41}$$

d. h.

$$(\mathfrak{x}^{\alpha}(t)\,\mathfrak{x}^{\beta}(t)) = (\bar{\mathfrak{x}}^{\alpha}(t)\,\bar{\mathfrak{x}}^{\beta}(t)). \tag{42}$$

Nun setzen wir

$$\overset{\circ}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha} \equiv d\mathfrak{x}^{\alpha}/dt - \mathrm{B}^{\beta\alpha}\,\mathrm{A}_{\beta\gamma}\,\mathfrak{x}^{\gamma} \tag{43}$$

und nennen die $\overset{\circ}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha}$ die „modifizierten Ableitungen“ des Dreieckes $\mathfrak{x}^{\alpha}$.

Die $\overset{\circ}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha}$ transformieren sich nach

$$\overset{\circ}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha} = c^{\alpha}_{\gamma}(\overset{c}{\mathfrak{x}}{}^{\gamma}) \tag{44}$$

wie bei den gewöhnlichen Ableitungen $\dot{\mathfrak{x}}^{\alpha}$. Dabei ist

$$\mathrm{D}^{\alpha\beta} = (\mathfrak{x}^{\alpha}\dot{\mathfrak{x}}^{\beta}). \tag{45}$$

Bildet man wieder die modifizierten Ableitungen von $\overset{\circ}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha}$, so folgt

$$\overset{cc}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha} = d\overset{\circ}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha}/dt - \mathrm{B}^{\beta\alpha}\,\mathrm{A}_{\beta\gamma}\,\overset{c}{\mathfrak{x}}{}^{\gamma}, \tag{46}$$

und so bekommt man

$$(47) \qquad \overset{\circ\circ}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha} = c^{\alpha}_{\beta}\,(\overset{\circ\circ}{\mathfrak{x}}{}^{\beta})^{*}$$

und kann bis zu beliebig hohen modifizierten Ableitungen aufsteigen, und das Problem, die sämtlichen Invarianten der

$$(48) \qquad \mathfrak{x}^{\alpha},\ \dot{\mathfrak{x}}^{\alpha},\ \ddot{\mathfrak{x}}^{\alpha},\ \cdots$$

zu bestimmen, ist äquivalent mit der einfacheren der Bestimmungen der Invarianten der

$$(49) \qquad \mathfrak{x}^{\alpha},\ \overset{\circ}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha},\ \overset{\circ\circ}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha},\ \cdots .$$

Geben wir drei Punkte

$$(50) \qquad \mathfrak{x}^{\alpha} \qquad [\alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}]$$

in $R_3$ nnd einen Punkt $\mathfrak{z}$ auf der Ebene $\mathfrak{x}^{\alpha}$ vor, so erhalten wir den Strahlenbüschel $\mathfrak{z}$, der mit den Strahlen $\mathfrak{z}\,\mathfrak{x}^{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{z}\,\mathfrak{x}^{\mathrm{II}}$, $\mathfrak{z}\,\mathfrak{x}^{\mathrm{III}}$ gebildet wird.

Weiter nehmen wir vier Punkte $\overset{*}{\mathfrak{z}}$, $\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha}$ im $R_3$; wir erhalten den Strahlenbüschel $\overset{*}{\mathfrak{z}}$, also gibt es ganau vier Möbiustransformationen des $R_3$-Raumes, die die Figur $\{\mathfrak{z}\,\mathfrak{x}^{\alpha}\}$ in die Figur $\{\overset{*}{\mathfrak{z}}\,\overset{*}{\mathfrak{x}}{}^{\alpha}\}$ überführen.

Weiter kann man untersuchen wie in meiner Arbeit[1].

Man kann untersuchen $m$ Ecken im $R_N$ wie oben.

## ( 10 )

Im folgenden möchten wir

$$(\mathrm{A}) \qquad \mathfrak{x} = \xi - (\xi\eta)\,\eta\,, \quad (\xi\eta)^{2} = 1$$

behandeln[2].

(**A**) Ist $\mathfrak{x}$ der Berührungspunkt von zwei Kreisen $\xi$ und $\eta$, so folgt

$$(1) \qquad \mathfrak{x} = \xi - (\xi\eta)\,\eta\,.$$

(1) NAKAZIMA, S.: Differentialgeo. der Hyperboloidscharen, Zyklidenscharen und Kurvenpaaren, Tôhoku Math. Journ. 31 (1929), S. 237 und S. 248.

(2) THOMSEN, G.: Über konforme Geo. II, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ., IV Bd., S. 122.

Ist ein Kreis $\mathfrak{z}$ auf $\xi$ senkrecht, so gilt

$$(2)\qquad (\xi\,\mathfrak{z}) = 0\,.$$

Aus (1), (2) folgt

$$(3)\qquad (\mathfrak{x}\,\mathfrak{z}) = -(\xi\,\eta)(\mathfrak{z}\,\eta)\,,$$

d. h.

$$(4)\qquad (\mathfrak{x}\,\mathfrak{z})^2 = 1\,.$$

Dies ist eine geometrische Deutung von (4).

Wenn $\mathfrak{z}$ und $\xi$ einander berühren, so folgt

$$(5)\qquad (\mathfrak{x}\,\mathfrak{z}) = 1 - (\xi\,\eta)(\mathfrak{z}\,\eta)\,,$$

oder

$$(6)\qquad (\mathfrak{x}\,\mathfrak{z})^2 = 2 - 2(\xi\,\eta)(\mathfrak{z}\,\eta)\,.$$

Aus (6) sieht man, dasz $\mathfrak{x}$ auf $\mathfrak{z}$ liegt, wenn

$$(7)\qquad (\xi\eta)(\mathfrak{z}\,\eta) = 1\,.$$

Wenn

$$(8)\qquad (\xi\eta)(\eta\,\mathfrak{z}) = -1\,,$$

so liegt $\mathfrak{x}$ auf $\mathfrak{z}$ nicht.

(**B**) Wenn ein Kreis $\mathfrak{y}$ $\xi$ und $\eta$ berührt, so folgt

$$(1)\qquad (\xi\mathfrak{y}) = 1\,,\quad (\eta\mathfrak{y}) = 1\,;$$

danach ergibt sich aus (A) und (1)

$$(2)\qquad (\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = 1 - (\xi\eta)\,,$$

so gilt $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = 0$, wenn $(\xi\eta) = 1$, d. h. $\mathfrak{x}$ auf $\mathfrak{y}$ liegt.

Wenn $(\xi\eta) = -1$, so folgt

$$(3)\qquad (\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = 2\,,$$

d. h. $\mathfrak{x}$ liegt auf $\mathfrak{y}$ nicht.

Also kann man wissen, dasz

$$(4)\qquad (\xi\eta) = 1$$

die Bedingung dafür ist, dasz $\xi$ und $\eta$ innen einander berühren.

(5) $(\xi\eta) = -1$

ist die Bedingung dafür, dasz $\xi$ und $\eta$ auszen einander berühren.

(**C**) Wenn

(1) $\mathfrak{x} = \xi - (\xi\eta)\,\eta$

und

(2) $\mathfrak{x} = \mathfrak{z} - (\eta\xi)\,\xi$

gelten, so folgt

(3) $\xi \equiv \mathfrak{z}$ oder $(\xi\,\mathfrak{z}) = -1$.

(**D**) Bestehen

$$(\xi\eta) = 1, \quad (\xi\,\mathfrak{z}) = 1, \quad (\mathfrak{z}\,\eta) = -1$$

in (A), so folgt

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = (\xi\mathfrak{y}) - (\xi\eta)(\mathfrak{y}\eta) = 1 + (\xi\eta) = 2.$$

(**E**) Wenn

(1) ${}_{(i)}\eta \quad [i = 1, 2, \ldots]$

anstatt $\eta$ in (A) gelten, so folgt

(2) $\mathfrak{x} = \xi - (\xi\,{}_{(i)}\eta)\,{}_{(i)}\eta, \quad [i = 1, 2, \ldots],$

daraus ergibt sich

(3) $(\xi\,{}_{(1)}\eta)(\mathfrak{z}\,{}_{(1)}\eta) = (\xi\,{}_{(2)}\eta)(\mathfrak{z}\,{}_{(2)}\eta) = \cdots.$

(**F**) Wir betrachten $n$ Kreise ${}_{(i)}\mathfrak{y}$, die den Punkt $\mathfrak{x}$ in (A) hindurchgehen. Es gelten

(1) $(\mathfrak{x}\,{}_{(i)}\mathfrak{y}) = (\xi\,{}_{(i)}\mathfrak{y}) - (\xi\eta)(\eta\,{}_{(i)}\mathfrak{y}) = 0,$

woraus sich ergibt

(2) $(\xi\,{}_{(i)}\mathfrak{y}) = (\xi\eta)(\eta\,{}_{(i)}\mathfrak{y}), \quad [i = 1, 2, \ldots, n].$

Aus (2) kann man wissen, dasz

(3) $\eta \perp {}_{(i)}\mathfrak{y},$

wenn

$$(4) \qquad \xi \perp {}_{(i)}\mathfrak{y}.$$

Weiter gelten

$$(5) \qquad \xi \perp {}_{(i)}\mathfrak{y}.$$

wenn

$$(6) \qquad \eta \perp {}_{(i)}\mathfrak{y}.$$

Aus (2) folgen

$$(7) \qquad \pm 1/\sqrt{2} = (\eta\, {}_{(i)}\mathfrak{y}),$$

daraus sieht man, dasz der Winkel zwischen ${}_{(i)}\mathfrak{y}$ und $\eta$ $\pi/4$ oder $3\pi/4$ gleich ist.

Im allgemeinen gelten

$$\pm \cos\phi \cos\psi,$$

wo $\phi$ der Winkel zwischen $\xi$ und ${}_{(i)}\mathfrak{y}$, $\psi$ der zwischen $\eta$ und ${}_{(i)}\mathfrak{y}$ ist.

(G) Wir betrachten

$$(1) \qquad \mathfrak{x} = \xi - (\xi\eta)\eta$$

und

$$(2) \qquad \bar{\eta} = \bar{\xi} - (\bar{\xi}\bar{\eta})\bar{\eta},$$

wo $\mathfrak{x}$, $\bar{\mathfrak{x}}$ die Punkte und $\xi$, $\eta$, $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ die Kreise in $R_3$ sind.

Aus (1), (2) folgt

$$(3) \qquad \mathfrak{x} - \bar{\mathfrak{x}} = \{\xi - \bar{\xi}\} - \{\varepsilon\eta - \bar{\varepsilon}\bar{\eta}\},$$

wo $\varepsilon = \pm 1$, $\bar{\varepsilon} = \pm 1$ sind.

Aus (3) kann man die Länge zwischen zwei Punkten $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ finden.

Aus (1), (2) eagibt sich

$$(4) \qquad l^2 \equiv (\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{x}}) = (\xi\bar{\xi}) - (\xi\eta)(\bar{\xi}\eta) - (\bar{\xi}\bar{\eta})(\xi\bar{\eta}) \\ + (\xi\eta)(\bar{\xi}\bar{\eta})(\eta\bar{\eta}),$$

wo $l$ die Länge zwischen zwei Punkten $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ ist.

Wenn

$$(5)\qquad \xi = \bar{\xi},\quad \eta = \bar{\eta}$$

gelten, so folgt aus (4)

$$(6)\qquad l^2 = -(\xi\eta)(\bar{\xi}\eta) - (\xi\bar{\eta})(\bar{\xi}\bar{\eta}).$$

Geht der Kreis $\mathfrak{y}$ den Punkt $\mathfrak{x}$ in (1) hindurch, so entsteht

$$(7)\qquad ({}_{(i)}\xi\mathfrak{y}) = ({}_{(i)}\xi\eta)(\mathfrak{y}\eta),$$

wo ${}_{(i)}\xi$ [$i = 1, 2, \dots, n$] $n$ Kreise wie in $\xi$ in (1) sind.

Aus (7) kann man wissen, dasz

$$(8)\qquad \mathfrak{y} \mid \eta,$$

wenn

$$(9)\qquad {}_{(i)}\xi \mid \mathfrak{y}.$$

(II) Wir behandeln

$$(1)\qquad \mathfrak{x} = \xi - (\xi\eta)\eta,\quad (\xi\eta)^2 = 1$$

und

$$(2)\qquad \mathfrak{x} = \xi - (\xi\bar{\eta})\bar{\eta},\quad (\xi\bar{\eta})^2 = 1;$$

aus (1) und (2) folgt:

$$(3)\qquad \begin{cases} (\xi\eta)(\xi\bar{\eta})(\eta\bar{\eta}) = (\xi - \mathfrak{x})^2 \\ \qquad = 1 - 2(\mathfrak{x}\xi) \\ \qquad = 1; \end{cases}$$

daraus wird hergeleitet

$$(4)\qquad (\xi\eta)(\xi\bar{\eta})(\eta\bar{\eta}) = 1.$$

Wenn

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = \xi - (\xi\eta)\eta \\ \quad = \xi - (\xi\bar{\eta})\eta \end{cases}$$

gilt, so folgt aus (5)

$$(6)\qquad \xi - (\xi\eta) = \xi - (\xi\eta)\bar{\eta}$$

oder

臺北帝國大學理農學部紀要

第二十二卷　第一號

昭和十三年三月

# MEMOIRS
## OF THE
# FACULTY OF SCIENCE
## AND
# AGRICULTURE

## TAIHOKU IMPERIAL UNIVERSITY

Vol. XXII, No. 1.-2

MARCH, 1938

HAYASAKA, Ichirô:

Two Species of *Trachydomia* from Japan

PUBLISHED

BY THE

TAIHOKU IMPERIAL UNIVERSITY

FORMOSA, JAPAN

---

The MEMOIRS OF THE FACULTY OF SCIENCE AND AGRICULTURE, Taihoku Imperial University, are published occasionally by the University, which exchanges them with the publications of other learned bodies and institutions throughout the world. Separate series will be sent to individual research institutions, and complete series to the central libraries of universities and larger institutions. Copies of the Memoirs may also be obtained from MARUZEN COMPANY LTD., Tôkyô, Japan, and THE TAIWAN NICHI-NICHI SHIMPÔ-SHA, Taihoku, Formosa, Japan.

All communications regarding the Memoirs should be addressed to the Dean of the Faculty of Science and Agriculture, Taihoku Imperial University, Taihoku, Formosa, Japan.

# TWO SPECIES OF *TRACHYDOMIA*[1] FROM JAPAN

Ichirô HAYASAKA

With Plate I.

(Accepted for publication, January 27, 1938)

Among the many specimens of the Japanese Palaeozoic gastropods in my collection there are two species of *Trachydomia*, a neritid genus characterized by the revolving rows of pustules on the shoulder of the whorls. Both the species are Permian in age, as is evidenced by the accompanying fusulinid foraminifers and other fossils.

One of the two species occurs in the *Fusulina*-limestone of Kinsyôzan, Gihu Prefecture. This limestone has yielded various kinds of fossils very abundantly. There are more than a dozen species of gastropods, including many very well-preserved specimens.

Another species comes from the *Fusulina*-limestone consisting of Permian formation of the southern part (Miyagi Prefecture) of the Kitakami Mountains in the northeastern part of the Main Island of Japan. Fossils are abundant also in certain parts of this region, though gastropods have not as yet been described from there.

This paper intends to describe these two species of *Trachydomia*. Other genera and species are left for other papers to follow. The species from Gihu Prefecture is *T. magna* which is new to science, and the other from Miyagi Prefecture is a species which seems to be very closely allied to *T. nodulosum* WORTHEN. The former is a very large species. It is found in a black bituminous horizon of the

1) A few years ago KNIGHT proposed to spell the generic name *Trachydoma*, instead of *Trachydomia* as was originally spelt, and described several North American species under the new name (Jour. Paleontol. VII, 4, p. 363, 1933). Because of the priority of nomenclature, however, he subsequently withdrew his suggestion of emendation (The same Jour. X, 6, p. 531, 1936).

[Mem. of the Fac. of Sci. and Agr., Taihoku Imp. Univ., Formosa, Japan, Vol. XXII, No. 1, March, 1937.]

*Fusulina*-limestone succession of Kinsyôzan, which contains several enormous forms of molluscs, as I have mentioned in my paper on the peculiar brachiopod fauna of Central Japan.[1] Several gastropods and a few pelecypods are indeed really unusually gigantic. Among the gastropods *Murchisonia, Pleurotomaria, Bellerophon, Naticopsis* and a few other genera are recognized, and the description of some of them has been prepared for some time. Whatever theory adopted, the occurrence of enormous forms of some species of molluscs and brachiopods in a bituminous limestone appears to be a phenomenon which is quite universal. Perhaps the "anthracolithic fauna" of Balia Maaden in Asia Minor, described by Julius ENDERLE,[2] containing such large forms as *Pleurotomaria ? Anatolia, Murchisonia Stachei, Naticopsis Arthaberi* and *Entalis Herculea* may afford another example of this correlation. A more detailed consideration of this problem will be attempted in a future occasion when describing the rest of the species of the Kinsyôzan gastropods.

---

**Trachydomia magna,** nov. sp.

Plate I, Figs. 1 and 2.

Shell thick, large and sub-trochiform, with large and strongly projecting pustules arranged in revolving rows on the whorls. Spire moderately low, and the base anomphalous, being covered for half the total area by the umbilical callus. Volutions rapidly increase in size, and sutures are not well marked, whorls being more or less strongly adpressed against the preceding. Aperture somewhat oval: peristome continuous and entire, with only a vestigial posterior canal. Outer lip even, inflected along the anterior margin; inside, a short but distinct groove is developed along the front margin. Inner or

1) HAYASAKA:—On the Up Carb. Brach. Fauna from the Nabeyama Region, *etc.* This Memoir vol. VI, No. 2, p. 15-17.

2) ENDERLE:—Ueber eine anthracolithische Fauna von Balia Maaden in Kleinasien. Beitr. z. Palaontologie u. Geologie Oesterrich-Ungarns und des Orients, Bd. XIII (1901).

columellar lip straight and smooth, formed by callus which covers an area equaling that occupied by the aperture: a depression indicates the position of the obliterated umbilicus.

Three revolving rows of pustules on the side of the body whorl, oblique to the outer margin of the peristome. Pustules in the uppermost row are the largest and the most projecting. On the penultimate and earlier whorls only two rows are exposed. Pustules very rapidly decrease in size toward the apex. Basal surface ornamented with spirally arranged series of much smaller and lower pustules: these rows of pustules are oblique to the revolving rows and almost perpendicular to the anterior margin of the peristome: 9 or 10 spiral rows are found in the non-callous area, increasing in number by means of interpolation corresponding to the enlargement of the basal area.

Surface of the shell covered with a thin layer of a calcareous substance which forms strongly imbricating scaly lamellae, though often worn away in some specimens as well as at a part or parts of a specimen.

DIMENSIONS: This species is represented in my collection by 14 specimens, of which 12 are quite well preserved and allow measurements, although the nuclear part of the whorls is not always complete owing to friability.

| Specimen No. | No. of whorls | Height (mm) | Width (mm) | Pleural Angle |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 5.5~6 | 66[1] | 67 | 120° |
| 2 | 5.5~6 | 67[2] | 67 | ca. 120° |
| 3 | 5.5~6 | 63[3] | 65 | ?[4] |
| 4 | 5.5~6 | 68.5 | 61 | 92°± |
| 5 | 5 | 58[5] | 48+ | 85° |
| 6 | 5.5 | 56 | ca. 50[6] | 98°±[7] |
| 7 | 5 | 47 | 53 | 110°± |
| 8 | 5 (?) | 42.5 | 50 | ca. 110° |
| 9 | 5 | 49 | 45 | ca. 108° |
| 10 | 5~5.5 | 53.5 | ca. 49[6] | 97° |
| 11 | 5 (?) | ca. 55 | 54 | 110° |
| 12 | 5.5 | 42 | 42[6] | 103°± |

1) Lost nuclear part is assumed to measure ca. 3 mm.
2) " " " " " " " ca. 3 mm.
3) Lost nuclear portion restored.
4) More or less deformed.
5) Anterior lip broken open, and consequently looks unusually high.
6) Restored.
7) Exceptionally convex laterally.

REMARKS: As far as my knowledge reaches the species here described may be an exceptionally large representative of the genus *Trachydomia*. In this species the important features of the genus are very well recognized. On examining the specimens I have received the impression as if there were two types in this species, more or less differing from each other in regard to the form of the shells. One of the two types or forms comprizes specimens that are higher than wide, namely, specimens Nos. 4, 5, 6, 9 and 10. To the other type specimens Nos. 1, 2, 3, 7, 8 and 11 are considered to belong: they are wider than high. To decide the matter, however, many more specimens will have to be examined.

In point of possessing rather few large pustules arranged in revolving or spiral rows the present species appears to be quite closely allied to *Trachydomia moorei* KNIGHT[1]: these two species may well be regarded as belonging to the same group or type of the genus. *T. magna* differs, however, from *T. moorei* in that (1) the pleural angle is much larger (it is about 80°± in the North American species); (2) the pustules are so much more prominent, that they may be called spines; and (3) the size of the shell is extraordinarily large. The latter two features seem to characterize the senile or phylo-gerontic state.

LOCALITY AND HORIZON: All the specimens occurred in one and the same black, bituminous limestone bed in the succession of the *Fusulina*-limestones forming the famous hill of Kinsyôzan, Akasaka-mati, Gihu Prefecture (Province of Mino). This black bituminous zone is wonderfully rich in fossils of molluscs, brachiopods, corals and others, beside the *Neoschwagerina* group of foraminifers.

In spite of the fusulinid foraminifers of this locality having been studied repeatedly by several palaeontologists, other groups of the fossils that occur abundantly had been neglected for a long time until 1925 when the lamellibranchs and scaphopods were described by me.[2]

---

1) J. Brooks KNIGHT: - *op. cit.*, p 390, pl. 46, fig. 1.

2) I. HAYASAKA:—On Some Paleoz. Molluscs of Japan, I. Lamellibranchiata and Scaphopoda. Sci. Rep. Tôhoku Imp. Univ., II ser. (Geology), VIII, 2, 1925. In this paper 8 species are described.

Brachiopods were described subsequently.[1] As to the gastropods, the study of them has been suspended for years.

The gastropod faunule of Akasaka, being characterized by a great number of extraordinarily large forms, seems to have deeply impressed the geologists of older times. Thus, GOTTSCHE[2] mentioned in his letter to ROEMER, *Pleurotomaria*, ? *Murchisonia*, *Bellerophon* aff. *hiulcus* Sow. beside fusulinid and other foraminifer genera, corals and echinoderm fragments. Subsequently, various generic names appeared in various geological reports, to occur, namely, *Loxonema*, *Naticopsis* and others beside those mentioned by GOTTSCHE. It seems there is a great number of specimens of this locality, not only of gastropods but also of other groups that are distributed among schools and other institutions, all without palaeontological determination. What I possess of the Akasaka specimens is only a very small fraction of what has hitherto been yielded by the beds: many of them were presented to me by Prof. T. WAKIMIZU who had chances of collecting Akasaka fossils a long time ago. It is now almost impossible to find well preserved specimens in the locality.

The occurrence of *Neoschwagerina* group decides its geological age: this part of the limestone sequence forming Kinsyôzan is Lower Permian, according, among others, to OZAWA's thorough stratigraphical studies of the *Fusulina*-limestone forming the hill of Kinsyôzan.[3]

---

1) I. HAYASAKA:—On *Lyttonia* and other Brachiopods from Kinsyôzan (in Japanese). Jour. Geol. Soc. Tôkyô, XXXII, 1925. (Supplemented in the same Journal, XXXIII, 1926.) In this note *Reticularia lineata*, *R. Waageni*, *R.* cf. *inequilateralis*, *Terebratuloidea* (?) sp. are mentioned from this black limestone.
HAYASAKA:—On three Brachiopod Species of the Subfamily Orthotetinae in the *Fusulina*-Limeston of Kinsyôzan, *etc.* Mem. Fac. Sci. & Agr., Taihoku Imp. Univ., vol. IV, No. 1, 1932.

2) GOTTSCHE:—Ueber japanisches Carbon. Zeitschr. d. deutsch. geol. Gesel., XXXVI, p. 653, 1884.

3) OZAWA:—Stratigraphical Studies of the *Fusulina*-Limestone of Akasaka, Prov. Mino. Jour. Fac. Science, Imp. Univ. Tôkyô, Section II, vol. II, pt. 3, 1927.

## **Trachydomia** cfr. **nodulosum** WORTHEN

Plate I, Fig. 3.

1933. *Trachydomia nodulosum*, KNIGHT: The Gastropods of the St. Louis, Missouri, Pennsylvanian Outlier: VI. The Neritidae Jour. of Paleontology, VII, p. 389, pl. 46, fig. 3.

*Trachydomia nodulosum* WORTHEN of the North American Pennsylvanian Formation was re-described by KNIGHT in his recent work cited above. He emphasizes, as the most important characteristic of this medium-sized species, the "strong tendency" of "rather sharply defined pustules" to arrange themselves in revolving rows. This tendency is somewhat more distinct in the specimen at hand. It was discovered a long time ago, with several molluscan and other fossils, in the *Fusulina*-limestone of the Kitakami Mountains, close to the town of Maiya, Miyagi Prefecture. The only specimen I have has its basal portion broken off, and consequently the another important characteristic of *T. nodulosum*, *i.e.*, "the form of the anterior columellar portion of the aperture," is obscured. The size of the shell is not so large as that of the American species.

The outline of the shell is typically littoriniform, with at least 6 volutions, the spire being rather high and attenuating—somewhat higher than in *T. nodulosum*. The measurements are: height, ca. 10 mm.; width, ca. 9.5 mm.; pleural angle, ca. 95°. The nuclear shell is preserved; it appears to be smooth on the surface. The whorls are convex, and very rapidly increase in size; their upper edge is quite strongly adpressed against the next above, forming an unornamented revolving area or zone just below the suture which is not very deep.

The nuclear part of the spire is, as said above, free from sculpture. The nodes or pustules are recognized as such first in the third volution, the revolving arrangement being predicted there already. On the outer surface of the partly broken body whorl there are six rows of pustules. On the basal surface the rows are about five.

During my journey abroad, 1936-1937, I enjoyed the privilege of carefully scrutinizing Dr. KNIGHT's original material of North American Carboniferous Gastropods preserved in the Peabody Museum. For this I am very deeply indebted to Prof. DUNBAR to whom I wish to express my thanks. As far as the characters observed of the specimen at hand as well as of those of North American species are concerned, it is hardly possible to distinguish one from the other. Had I a few more and especially well preserved specimens from the Kitakami locality, the identity of the two might be concluded.

LOCALITY AND HORIZON:—Maiya-mati, Toyama-gun, Miyagi Prefecture (Western border of the Kitakami Mountain); in the *Fusulina*-limestone. There are many fossils washed out on the weathered surface of the limestone: *Mizzia*, *Michelinia* (*Michelinopora*) *multitabulata* YABE and HAYASAKA, several other minute gastropods, *etc.* All the fossils are, however, rather poorly preserved and are hardly accessible to palaeontologist. The geological age is regarded as being Lower Permian.

## APPENDIX:

## ON THE OTHER ASIATIC SPECIES OF *TRACHYDOMIA*.

In one of the recent numbers of Palaeontologia Sinica Mr. T. H. YIN described a species of *Trachydomia* from the Penchi Series (Upper Carboniferous) of the Province of Kansu, China. *Trachydomia verrucosa* YIN,[1] as the species is called, is described as being "closely related to *Trachydomia wheeleri* SWALLOW of North America (and southern Russia. . . .) but easily distinguishable by finer and much more numerous verrucosities." *Trachydomia wheeleri*, however, is "a species that was never figured by its author.[2]" KNIGHT insists

1) YIN:—Gastropoda of the Penchi and Taiyuan Series of N. China. Pal. Sinica, ser. B, XI., fasc. 2, p. 26, pl. III, figs. 8-11, 1932.

2) KNIGHT:—*op. cit.*, p, 368, 1933.

upon discarding the name "*wheeleri*" as representing a definite species of the genus "until it can be made useful by description and re-illustration from topotype material." Among the North American species described by KNIGHT, the most closely allied to the Chinese one is *T. sayeri*, though the two may not be identical. In point of developing very numerous pustules that are quite regularly arranged in a quincunxial pattern, and of low spire, they are indistinguishable. The American species is Pennsylvanian in age.

Two species of *Trachydomia* have hitherto been reported as occurring in French Indo-China. *T. Dussaulti* MANSUY was described in 1913.[1] MANSUY states that his species is very much like *T. wheeleri* SWALLOW, especially in point of shell ornamentation. From the latter species it differs in that "son dernier tour est plus renflé, arrondi, non subanguleaux; par centre, l'ouverture est moin dilatée." In this case also, the southern Russian fossil seem to have been taken into consideration for comparison. Judging from the descriptions and pictures the species of MANSUY and *T. verrucosa* are very much alike.

Another Indochinese species is *T. Deprati* MANSUY of which the description was published in 1914.[2] MANSUY recognized its very close affinity with *T. nodosa* M. & W. and especially with its variety *hollidayi* M. & W. The resemblance between *T. Deprati* and *T. nodosa*[3] as is understood in a general way, is really very great. According to KNIGHT, *T. hollidayi* is synonymous with *T. nodosa*. The holotype of *T. hollidayi* is pictured by KNIGHT in his monogragh. According to the illustration *T. nodosa* looks much more like *T. Deprati* than *T. hollidayi*.

---

1) MANSUY:—Faunes des Calc. a *Productus* de l'Indochine, I. sér. Mém. du Serv. Géol. de l'Indochine, vol. II, fasc. IV, p. 101, pl. XI, fig. 5, 1913.

2) MANSUY:—Faunes des Calc. a *Productus* de l'Indochine, II. sér. Mém. du Serv. Géol. de l'Indochine, vol. III, fasc. III., p. 44, pl. IV, fig. 14, 1914.

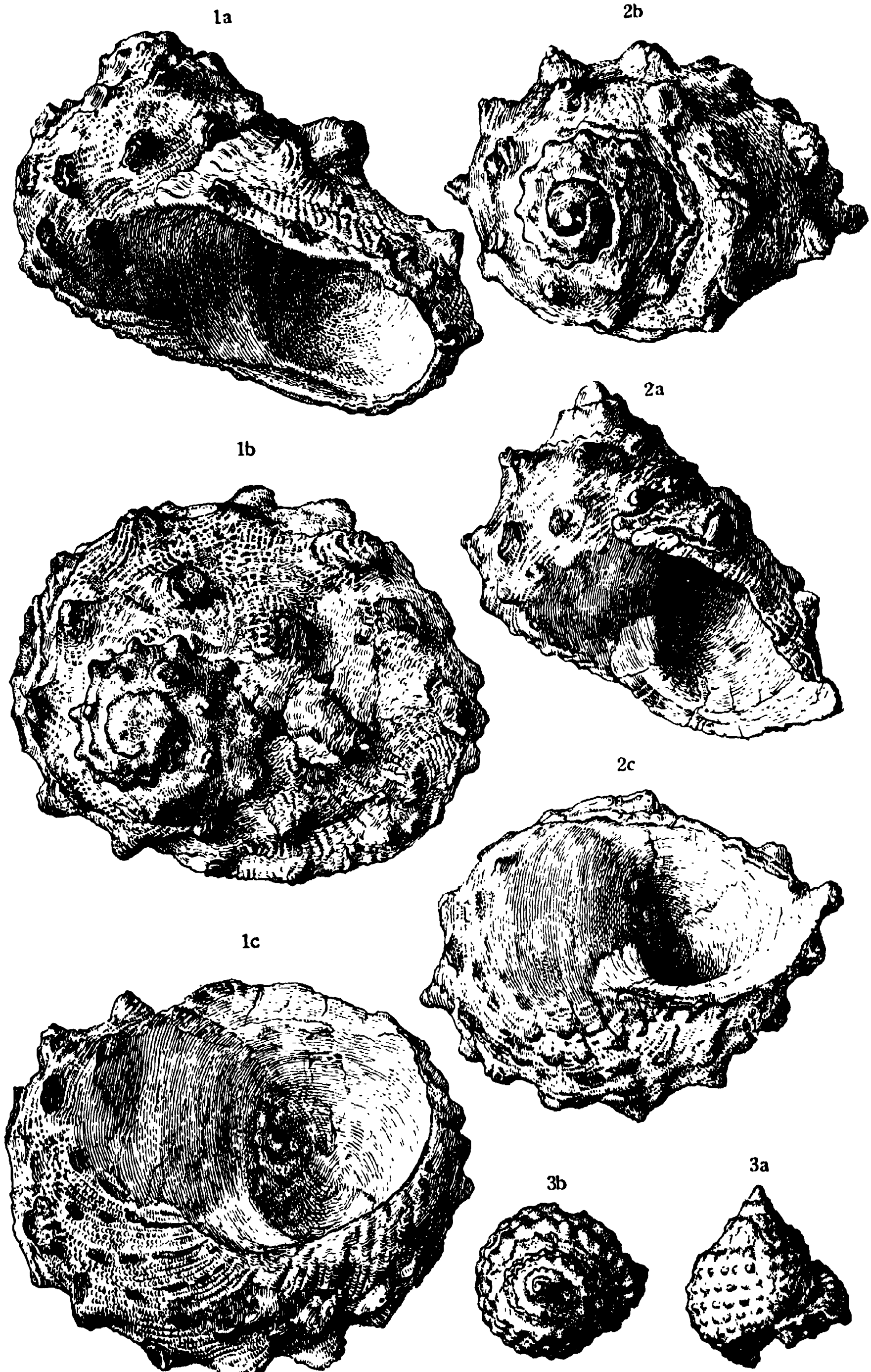
3) KNIGHT:—*op. cit.* (1913), p. 383, pl. 45, figs. 2a-i. The specific name should be "*nodosa*" instead of "*nodosum*," (see KNIGHT:—Jour. Paleont. vol. X, 6, p. 533 1936.)

# PLATE I.

## Explanation of Plate I.

Figs. 1 and 2. *Trachydomia magna,* nov. sp. (Natural size.)
a, front view; b, apical view; c, basal view.
1. Specimen No. 1. (A wider type.)
2. Specimen No. 2. (A higher type.) Apical and basal views are slightly oblique.

Fig. 3. *Trachydomia* cfr. ***nodulosum*** WORTHEN. (3 times natural size.)
a, front view; b, apical view.




SAKAMOTO del.

臺北帝國大學理農學部紀要

第二十二卷 第二號

昭和十四年三月

# MEMOIRS
## OF THE
# FACULTY OF SCIENCE
## AND
# AGRICULTURE

## TAIHOKU IMPERIAL UNIVERSITY

Vol. XXII, No. 2.

MARCH, 1939



PUBLISHED

BY THE

TAIHOKU IMPERIAL UNIVERSITY

FORMOSA, JAPAN

---

The MEMOIRS OF THE FACULTY OF SCIENCE AND AGRICULTURE, Taihoku Imperial University, are published occasionally by the University, which exchanges them with the publications of other learned bodies and institutions throughout the world. Separate series will be sent to individual research institutions, and complete series to the central libraries of universities and larger institutions. Copies of the Memoirs may also be obtained from MARUZEN COMPANY LTD., Tôkyô, Japan, and THE TAIWAN NICHI-NICHI SHIMPÔ-SHA, Taihoku, Formosa, Japan.

All communications regarding the Memoirs should be addressed to the Dean of the Faculty of Science and Agriculture, Taihoku Imperial University, Taihoku, Formosa, Japan.

# On the Occourrence of Eocene Foraminifera in the Neighbourhood of Besleo, Timor.

(With 2 Text-figures and Plate II.)

Ichirô HAYASAKA

and

Kazuhiko ISHIZAKI

(Accepted for publication, Dec. 6, 1938.)

During the summer of the year 1929 the senior author had an opportunity to visit the western, Dutch part of the island of Timor for a short time. A number of fossils, chiefly Permian and Triassic, were collected by him at various localities in the Baoen and Niki-Niki regions. This note is intended to record the discovery of a few Eocene foraminifers that were made by him in the heaps of the Permian fossils at and in the neighbourhood of Besleo in the Niki-Niki region.

The occurrence of Eocene foraminifers on the island of Timor had been known for quite a long time before the publication of the monographic work of HENRICI[1] in 1934. A number of localities of Eocene and Miocene larger foraminifers discovered by various scientists are mentioned in it, of which the following three are the places that seem to be situated more or less near those whence our material originated.

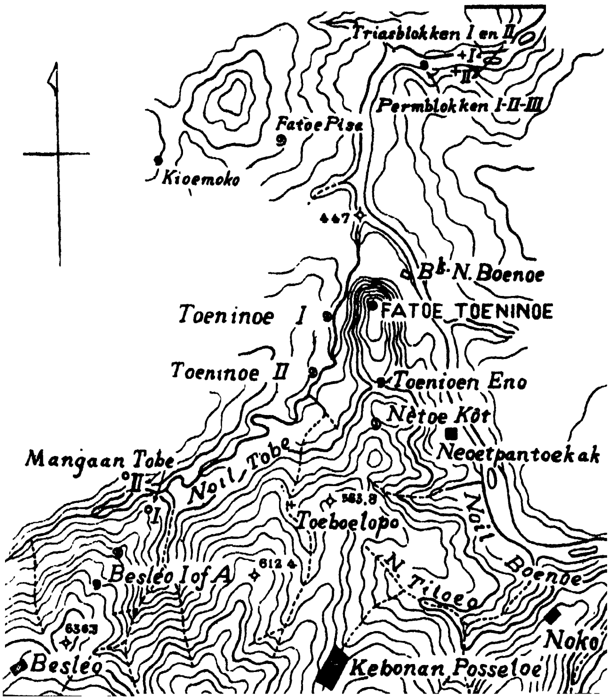
Loc. No. 38. The road from Niki-Niki to Noil Tefu, beyond Noil Fatu (Coll. MOLENGRAAFF).

Loc. No. 39. Uwaki, between Onelassi and Toi, ca. 1.5 hours' distance to the south of Toi (Coll. WANNER).

Loc. No. 40. Fatu Aoëh, on the right side of the Noil Bunu, ca. 10 km. east of Niki-Niki (Coll. WANNER).

1 H. HENRICI: Foraminiferen aus dem Eozän und Altmiozän von Timor. Palaeontographica, Supplement-Band IV, IV Abt. 1 Lfg. 1934.

[Mem. of the Fac. of Sci. and Agr., Taihoku Imp. Univ., Formosa, Vol. XXII, No. 2, March, 1939.]




◎ Localities of Permian fossils
+ Localities of Triassic cephalopods
○ Localities of Cretaceous deep-sea clay

Fig. 1.
Neighbourhood of Besleo, a part of the map of BURCK, 1923, reduced.
(Scale 1 : 31,250)

The present material consists of a single specimen of a medium sized *Camerina* which was found among numberless specimens of various brachiopods and other Permian fossils on the eastward slope of Besleo I[1] and a small, irregular fragment of a pale gray *Fasciolites*-limestone measuring about 10×5×5 cm. which was discovered at Fatoe Pisa, about 2 km. to the north of the former locality, on the

1) For this and the following locality names, see the map 4 (Niki-Niki) annexed to D. M. BURCK:—Oversicht van de onderzoekingen de 2e Nederlandsche Timor-Expeditie (Jaarb. v. h. Mijnwezen in Nederlandsch Oost-Indie, Jaarg. 1920), 1923. A part of this map is reproduced in the present paper (Text-fig. 1.) A sketch map of this region is also given by J. WANNER in his "Das Alter der permischen Besleo-Schichten von Timor." (Centralbl. f. Min, etc. Abt. B, No. 10, p. 544-545, 1931) in which Fatoe Pisa is spelt more phonetically Fatu Pisah.

left side of the Noil Bunu (or Boenoe), also among Permian species, washed out on the ground. Efforts to search for further material at these localities, as well as at several other places in the region around Niki-Niki, were not successful, however.

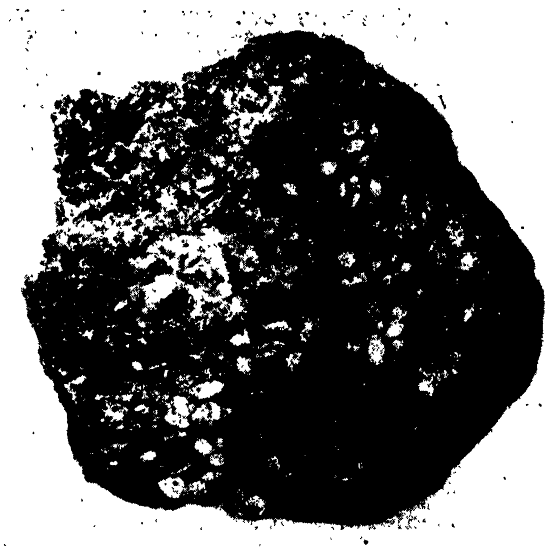


Fig. 2.
The block of *Fasciolites*-limestone under consideration, natural size.

Not having any detailed map of the region it is not very easy to locate the three localities of HENRICI's material mentioned above, but, judging from the explanations, it seems quite certain that none of them coincide with either of the two localities under consideration in the present paper. Supposing for the present that these fossils were not allochtonous, their occurrence seem to deserve mention as supplementing the records made known up to present. These occurrences may be explained in various ways, but it should be borne in mind that the very complicated geological structure of the region,—which, at a certain place in the neighbourhood of Belseo, causes the exposure, within the area of Permian fossils, of the Cretaceous manganiferous beds with abundant shark teeth[1]—could have effected the very irregular distribution also of Eocene deposits.

The following are the fossils described in this paper:

1. *Fasciolites timorensis* (VERBEEK)
2. *Fasciolites wichmanni* (RUTTEN)

1) L. F. de BEAUFORT:—On a Collection of up. Cret. Teeth and other Vertebrate Remains from a Deep Sea Deposit in the Island of Timor. Jaarb. v. h. Mijnw. Jaarg. 20, pp. 61-70, 1923.

3. *Camerina* cfr. *perforata* (MONTFORT), "A" and "B" types of HENRICI.

A few other forms, beside smaller kinds like MILIOLIDAE, are represented in thin slides, but oriented sections not being available, their specific determination is hardly possible.

### **Fasciolites timorensis** (VERB.)

Pl. II, Figs. 1–3.

1896. *Alveolina timorense*, VERBEEK en FENNEMA:- Geologische Beschrijving van Java en Madoera, Vol. II, p. 1094, pl. II, fig. 39.
1912. *Alveolina javana*, DOUVILLÉ:—Les foraminifères de l'Isle de Nias. Sammlung. d. geol. Reichs-Mus. in Leiden, 8, p. 266, pl. 19, fig. 13.
1932. *F. ovicula*, BAKX:—De genera *Fasciolites* en *Neoalveolina* in het Indo-Pacifische Gebied. Verhandl. geol.-mijnbouwk. Genoots. Nederl. en Koloniën, IX, p. 225, pl. II, fig. 11-14.
1934. *Fasciolites ovicula*, CAUDRI (*pars*):—Tertiary Deposits of Soemba, p. 121, pl. IV, fig. 1, 2.
1934. *Fasciolites timorensis*, HENRICI:—Foraminiferen aus dem Eozän u. Altmiozän von Timor. Paläontographica, Supplement-Band IV, IV Abt., 1 Lfg., p. 37, pl. II, fig. 15; pl. III, fig. 2.

Shell ellipsoidal, with ends somewhat bluntly rounded in some examples. In adult specimens the larger diameter measures 7.1 mm. and the smaller one, 4.5 mm.; form ratio thus being 1.48 : 1. In the two meridional sections, the larger diameters are 5.84 mm. and 5.86 mm. and the smaller ones 3.4 mm. and 3.75 mm.; the ratio in these cases being 1 : 0.63 and 1 : 0.69, respectively.

Surface rather widely furrowed from pole to pole, but owing to the weathered condition further details are not observable.

Initial chamber about 150-200 $\mu$ in diameter, surrounded by two or three closely coiled whorls. Revolving wall from 3rd or 4th to 5th or 6th volutions rapidly increases in thickness, being almost four times thicker than that of other volutions, thus showing the typical *Flosculina*-like plan of structure. Volutions are over twenty in the adult stage.

Measurements in meridional section are as follows:

| Longer diameter (in mm.) | 0.50 | 1.00 | 1.20 | 1.30 | 1.50 | 2.00 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Number of whorls | 3 | 5 | 6 | 7 | 9 | 12+ |

Semissodistant radii (in $\mu$) are the following;

i. along longer axis

23-60, 105-135, 390-435, 630-675, 990-1050, 1245-1350, 1500-1590, 1725-1825, 1860-1950, 2070-2145, 2250-2350, 2430-2505, 2580-2685

ii. along shorter axis

15-40, 75-113, 308-353, 555-585, 750-795, 930-990, 1065-1110 1145-1200, 1253-1335, 1359-1485, 1530-1575, 1665-1725

REMARKS: —In the recent work of CAUDRI quoted above, *Alveolina javana* DOUVILLÉ (non VERBEEK) is included in *Fasciolites ovicula* (NUTTALL), which, according to HENRICI, is synonymous with *F. timorensis*. *F. ovicula* was re-described by BAKX,[1] who mentions *Alv. javana* DOUVILLÉ in the synonymy. On the other hand, HENRICI is of opinion that BAKX's *F. ovicula* is identical with *F. timorensis* of his definition.

BAKX who first believed in the identity of *Alveolina timorense* VERBEEK and *Fasciolites oblonga* (d'ORBIGNY)[2] seems to have abandoned the idea because of the differences between them subsequently recognized to exist.[3] HENRICI recognizes them as distinct species.

Thus, the specific identity of *F. timorensis* and *F. ovicula* is suggested theoretically. In discussing the species *F. ovicula*, CAUDRI recognizes the very distint differrence in the size of the initial chambers of the Soemba specimens and those of the original Indian specimens of NUTTALL, the former being much larger than the latter (see CAUDRI, p. 129). In this respect, at least, the specimens from Soemba are really very much like *F. timorensis* from Timor, including the few specimens HAYASAKA obtained in the Niki-Niki region.

Having only very scanty material the present writers can not extend their discussion any farther on the affinities and differences of

1) L. A. J. BAKX:—*op. cit.*
2) BAKX:—*op. cit.* p. 218.
3) CAUDRI:—*op. cit.*, foot-note, p. 132.

this interesting but difficult kind of fossil. According to CAUDRI there are, in her numerous specimens, various forms showing characteristics transitional between different species. It seems that there are in Soemba a few forms that are in some respects quite like *F. timorensis*, though *F. timorensis* itself is not mentioned in CAUDRI's memoir.

The specimens at the disposal of the present authors are in general quite similar to *F. timorensis* illustrated by HENRICI, although the former appear to be somewhat less elongate than the latter. The floor of the later whorls in the present specimens does not so suddenly decrease in height in the polar regions as in those of HENRICI: the maximum thickness of the floor is also thicker in the former than in the latter. The present specimens show some affinity to *F. ovicula* of BAKX. All the specimens at hand are of the flosculine type, though there is one incomplete and random section found in one of the thin slides which seems to show a non-flosculine type.

*F. timorensis* is the most predominant of the Eocene foraminifers preserved in the limestone block obtained in Besleo.

### **Fasciolites wichmanni** (RUTTEN)

Pl. II, Fig. 4.

1914. *Alveolina wichmanni*, RUTTEN:—Foraminifera-führende Gesteine. Nova Guinea, VI, p. 45, pl. IX, fig. 1, 2.

1914. *Alveolina wichmanni*, RUTTEN: - Studien über Foraminiferen aus Ost-Asien. Samml. d. geol. Reichs-Mus. Leiden (1 ser.), vol. IX, p. 315, pl. XXVI, figs. 3, 4; pl. XXVII, fig. 2.

1918. *Alveolina wichmanni*, NEWTON:—Foraminiferal and Nullipore Structures in some Tert. Limest. from New-Guinea. Geol. Mag. dec. VI, vol. V, p. 207, pl. VIII, figs. 1-6.

1932. *Fasciolites wichmanni*, BAKX:—De genera *Fasciolites* en *Neoalveolina* in het Indo-Pacifische Gebied. Verhandl. Geol.-Mijnbouwk. Genoots. Nederl. en Koloniën, IX, p. 234, pl. IV. figs. 26-28.

1934. *Fasciolites wichmanni*, CAUDRI:—Tertiary Deposits of Soemba, p. 132, pl. IV, figs. 7, 8.

1934. *Fasciolites wichmanni*, HENRICI:—Foram. aus dem Eozän und Altmiozän von Timor. Palaeontographica, Supplement-Bd. IV, IV Abt., 1 Lfg., p. 42, pl. III, fig. 6.

A few specimens are recognized to occur in thin slides, but, being

quite rare, it is very difficult to prepare an oriented and central section of a specimen. However, this small species has a peculiar slender form in typical specimens, and is rather easily recognizable.

One of the specimens at hand is 2.75 mm. long and 0.60 mm. across, as is measured in a sagittal section. The inner structure, though not very well observed, coincides with that shown by the previous authors referred to above.

### **Camerina** cfr. **perforata** MONTFORT[1] (A-Form)

Pl. II, Figs. 5-9.

A small, megasphaeric form of a *Camerina* seems to be of quite common occurrence in the *Fasciolites*-limestone fragment found at Fatoe Pisa near Nipol. In the thin slides made from the limestone several sections are recognized, a few of which cut through the initial chamber, if not centrally.

The test is small and somewhat irregularly lenticular, one specimen picked out of the rock matrix measuring 4.85 mm. and 0.2 mm. in diameter and thickness, respectively: the surface ornamentation is not recognizable in detail.

An exactly central section has not been observed, but, in a slightly oblique section which is about 6 mm. in diameter and has about 5 volutions, the apparent diameter of the initial chamber is 0.45 mm. the diameters of the first to fifth volutions are 1 mm., 2 mm., 3 mm., 4 mm. and 5 mm., respectively. Septa are curved backwards. It is very difficult to count the number of septa in each whorl, but it is obvious that the septa are practically as distant as those in *C. perforata* as is illustrated by HENRICI (Fig. 3, pl. I), or in the Ia form

1) For *Camerina perforata* HENRICI's idea of systematique is followed by the present writers. See HENRICI:—Foraminiferen aus dem Eozän und Altmiozän von Timor, p. 21, pl. I, figs. 1-4 and 9 (Supplement-Bd. IV, IV Abt., 1 Lfg., Palaeontographica, (1934). HENRICI reasonably considers *Nummulites javanus* (VERBEEK en FENNEMA:—Java en Madoera, p. 1096-1100, pl. III, figs. 45-57; pl. IV, figs. 58-68; pl. V, figs. 69-73; pl. VII, fig. 94) and a part (Form 1 a) of *N. bagelensis* (*ditto*, p. 1101, pl. III, fig. 74; pl. VI, figs. 76-81; pl. VII, figs. 95-97) as synonymous with *Camerina perforata*.

of "*Nummulites bagelensis*" of VERBEEK and FENNEMA.

A minute, stout specimen in one of the thin slides measures 2.25 mm. in diameter and 1.25 mm. in thickness, resembling the one pictured by VERBEEK and FENNEMA.

All these observations seem to show the very close affiinity of the present species to the "A-Form" of *Camerina perforata* of HENRICI: practically they are identical. Because of a few points that are not very clear at present, however, a decision is reserved until later.

### **Camerina** cfr. **perforata** MONTFORT (B-Form)

Pl. II, Figs. 8 and 9.

Here a few lines will be spent on the single specimen of a medium-sized *Camerina* which was obtained by HAYASAKA on the eastern slope of Besleo I. It is a lenticular shell with somewhat irregular outline: it is fractured across acentrally, but the two pieces are naturally attached. It measures 11 mm. and 4.5 mm. in diameter and thickness, respectively. The surface ornamentation consists of irregularly S-formed striae, almost radiating from the center on one side, while they are somewhat excentric on the other.

Having only one example at hand the writers hesitate to cut it or polish it for further observations. In all probability, however, this may be identified with one of those described as *Nummulites javanus* by VERBEEK and FENNEMA (Fig. 56, pl. III, for instance). The pictures given by HENRICI in his paper (Fig. 1 and 2, pl. I) are likely to represent a thicker type of the species, corresponding perhaps to the $\alpha$ or $\beta$ variety of the authors.

There are several other foraminifers recognized in thin slides. There may be a few other forms of the larger foraminifers represented by very incomplete, fragmentary pieces of which determination is consequently hardly possible. Very minute *Fasciolites* may be either

younger forms of the species above described or forms different from them. Of the many smaller foraminifers preserved in the rock there are several forms of MILLIOLIDAE: besides, textulariform and planispiral kinds are also quite frequent. Fragments of *Lithothamnium* also are not rare.

(May 20, 1933)

PLATE II.

## Explanation of Plate II.

Fig. 1. *Fasciolites timorensis* (VERB.): a nearly centric longitudinal section. (×13.3).

Fig. 2. *Fasciolites timorensis* (VERB.): another, a slightly more oblique section (×14).

Fig. 3. *Fasciolites timorensis* (VFRB.): an almost centric transvers section (×13.2).

Fig. 4. *Fasciolites wichmanni* (RUTTEN): a slightly excentric, sagittal section (×13.8).

Fig. 5. *Camerina* cfr. *perforata* (MONTFORT) (A-Form): two sagittsl sections (×14.6).

Fig. 6. *Camerina* cfr. *perforata* (MONTFORT) (A-Form): a slightly oblique but centric section (×13.4).

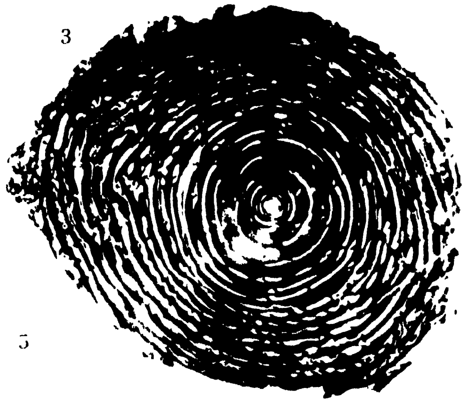
Fig. 7. *Camerina* cfr. *perforata* (MONTFORT) (A-Form): almost centric longitudinal section (×13.7).

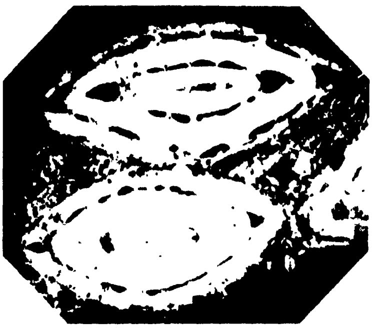
Fig. 8 and 9. *Camerina* cfr. *perforata* (MONTFORT) (B-Form): the only specimen in marginal and surface views (natural size).

1

2

3





5

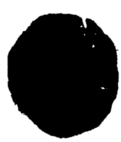
7

6

8

4

9



HAYASAKA Photo.

# SPIROMPHALUS, a New Gastropod Genus from the Permian of Japan.

(With Plate III.)

Ichirô HAYASAKA

(Accepted for publication, Dec. 6, 1938)

Among the many gastroppods from the black, bituminous *Neoschwagerina*-horizon of the *Fusulina*-limestone of the well-known Kinsyôzan, Akasaka-mati, Gihu Prefecture (Province Mino), there are a number of small, high-spired, many-whorled forms, practically indistinguishable in form, size and sculpture from the fossils called *Pseudozygopleura* by KNIGHT, and especially the sub-genus *Parazyga.*[1] However, on examining inner details of shells by cutting them longitudinally and transversely, a structure which seems to be quite uncommon is recognized. The basal or the anterior wall of the whorls extends inwards toward the center of the narrow, straight, tube-like, closed umbilicus, so as to form a spiral shelf or ridge inside: this callosity is so wide that the umbilicus is almost closed in each volution.

Many species of *Pseudozygopleura* were described by KNIGHT from the Pennysylvanian of North America. In none of them the development of a hollow, tubular umbilicus is described[2]: the figures of the columellar sections of the genus show this obviously. A few of the specimens of *Pseudazygopleura* from Texas presented to me by Prof. PLUMMER of the University of Texas, when I had the chance of meeting him in Austin in 1937, were prepared to examine if there is such a spiral shelf inside the umbilicus. Although the specimens are not well preserved to show the structural details, there is no vestige of the development of the spiral callosity.

Descriptions of many other gastropods of various geological ages,

1) J. Brookes KNIGHT:—The Gastropods of the St. Louis, Missouri, and Pennsylvanian Outlier: The PSEUDOZYGOPLEURINAE. Jour. Pal. IV, Suppl. 1, 1930.

2) *Ditto*, p. 14, fig. 3.

[Mem. of the Fac. of Sci. and Agr., Taihoku Imp. Univ., Formosa, Vol. XXII, No. 2, March, 1939.]

as far as available, have been examined, but the spiral shelf does not seem to have ever been recognized up to the present. Therefore, as long as the existence of this peculiar structural element is not found in any of the hitherto known gastropods, the Japanese Permian fossil under consideration should be regarded as a new genus. For this I propose the name *Spiromphalus*. If the spiral shelf of *Spiromphalus* is a really structural element hitherto unknown in gastropods, then the very structure may characterize larger systematic units, possibly a new family. In LOXONEMATIDAE, for instance, of which several genera are externally very much like the one under consideration, the spiral shelf does not develop.

The specimens being found washed out in the locality of Kinsyôzan, it is hardly possible to expect an individual completely preservsd. I have tried to discover specimens with a nuclear shell and a complete mouth, but have not been successful. Thus, the generic diagnosis can not be very comprehensive with respect to the details of the external features.

### *SPIROMPHALUS* HAYASAKA, nov. gen.

Small, high-spired, many-whorled gastropod, with transverse ribs on the surface of the whorls. Mouth low and narrow. Axis straight and hollow, provided with a spiral shelf which is the inward extension of the basal or anterior wall of the whorl.

The columellar or umbilical structure seems to be unique, though the inner structure of the Jurassic genus *Itieria Cabanetiana* d'ORB. as reproduced in KOKEN's palaeontological manual[1] seems to suggest a similar structure in the making.

In the development of gastropod shell, the umbilicus which in the earlier stages is only a flat hollow, gradually becomes deeper and

1) E. KOKEN:—Die Leitfossilien, p. 139, fig. 124 B, 1896.

narrower owing to the growth of the volution on the basal side. "Further departure is accompanied by an increasing height of the cone above and narrowing of the base and umbilicus below, until ultimately the latter closes. When this stage is attained a section of the shell shows that its axis is occupied by a solid column (columella) formed by the close contact of the whorls with one another."[1] Thus the fossil genus under consideration may be said to represent a stage in the shell development of the gastropod in which the umbilicus has initiated the solidification, or the columella-formation. Among the specimens at hand, however, stages before or after this do not seem to be represented, as far as the specimens internally examined are concerned.

One thing worthy of being mentioned here is the smallness of the shells. The largest one does not exceed 1.5 cm. in height. But, considering the fact that this genus is found abundantly with the very huge forms of *Pleurotomaria*, *Naticopsis*, *Bellerophon* and others among gastropods,[2] and *Solenomorpha elegantissima* HAYASAKA and *Myophoria japonica* HAYASAKA among pelecypods[3] the present specimens of *Spiromphalus* also should be expected as to have more or less extraordinarily large forms among the allied species or genera: the ordinary forms might not have been recognized anywhere possibly because of their smallness. Although the specimens are small, measuring not quite 15 mm, they are as a whole larger than those of the species of *Pseudozygopleura* described by KNIGHT.

---

1) H. H. SWINNERTON:—Outlines of Palaeontology, 2 ed., p. 232, 1930.

2) Several of these gastropods have been described by me: the descriptions will be published in a near future. Among them there are such huge specimens as a *Naticopsis* about 9 cm. high, a *Pleurotomaria* 18 cm. high, a *Murchisonia* about 38 cm. high, and the like, including *Trachydomia magna* HAYASAKA recently described and published in this Mem. XXII, 1, March 1938.

3) I. HAYASAKA:—On Some Paleoz. Molluscs of Japan, I. Lamellibranchiata and Scaphopoda. Sci. Rep. Tôhoku Imp. Univ. 2 ser. (Geology), VIII, 2, 1925.

As to the form and size of fossil organisms various theories have been propounded by many scientists. The coarse transverse ribs on the whorl surface and the consistence of the morphological features in general have to be regarded as the sign of the phylogerontic stage of development. In a recent book Edgar DACQUÉ very reasonably summarized the relation of the size of fossils and their antiquity, stating that all the organisms grow larger from their first appearance until the climax of their development.[1] *Spiromphalus* may in all probability be considered as a definite genus instead of being a younger form of any other species hitherto known.

Type species :– *Spiromphalus yabei* HAYASAKA, nov. spec.

### Spiromphalus yabei HAYASAKA

Pl. III, Figs. 1-9.

Shell slightly convex and sub-cylindrical, with more than 12 volutions (probably 15 or more), early volutions being broken off: whorls roundedly square in transverse section, the square shape becoming more obvious anteriorly: sutures shallow, but owing to development of coarse and sharp radial or transverse ribs on the whorl surface that tend to taper below, sutures appear quite conspicuous. Anterior end of the shell rather abruptly attenuates; base small and slightly elongate, with a callous deposition on the inner lip.

Transverse ribs or costae rather high and narrow, intercalating depressed interspaces about twice as broad as the costae: costae distinct throughout the height of the whorls, extending from suture line to suture line, wider upwards, as stated above, forming a more or less club-like appearance. Strictly speaking, these costae lean back very slightly, that is, the upper ends are a little backward of the lower. In moderate-size specimens there are about 19–20 costae on the penultimate whorls that average in diameter about 3.5 mm. No longitudinal or revolving ornamentation is developed.

1) Edgar DACQUÉ :—Organische Morphologie und Palaeontologie, p. 202-213, 1935.

Umbilicus closed and tube-like provided with a spiral ridge or shelf inside, which is the characteristic feature of the genus.

Three of the more perfect specimens give the following measurements that represent the general aspect of the species.

| | No. 1. | No. 2. | No. 3. |
|---|---|---|---|
| Height | 13.5 mm. | 14 mm. | 12 mm. |
| Greatest width | 3.5 | 3.8 | 3.5 |
| Number of whorls | 13 | 10 | 8 |
| Number of costae (penultimate whorl) | 19 | 20 | 19 |

There are specimens somewhat smaller than those mentiond here, but the larger ones are rarer.

In the form and sculpture in general, this species is almost indistinguishable either from *Pseudozygopleura (Parazyga) macra* KNIGHT[1] or *P. (P.) dunbari* KNIGHT.[2] If the inner structure of the umbilicus had not been found to be spirally ridged or shelfed, the Japanese species under consideration would have found its place somewhere in the neighbourhood of both these American forms.

Aug. 18, 1938

---

1) KNIGHT :—*op. cit.*, p. 58, pl. 3, fig. 7.
2) KNIGHT : -*op. cit.*, p. 58, pl. 3, fig. 8.

PLATE III.

## Explanation of Plate III

### **Spiromphalus yabei** HAYASAKA, g. et s. n.

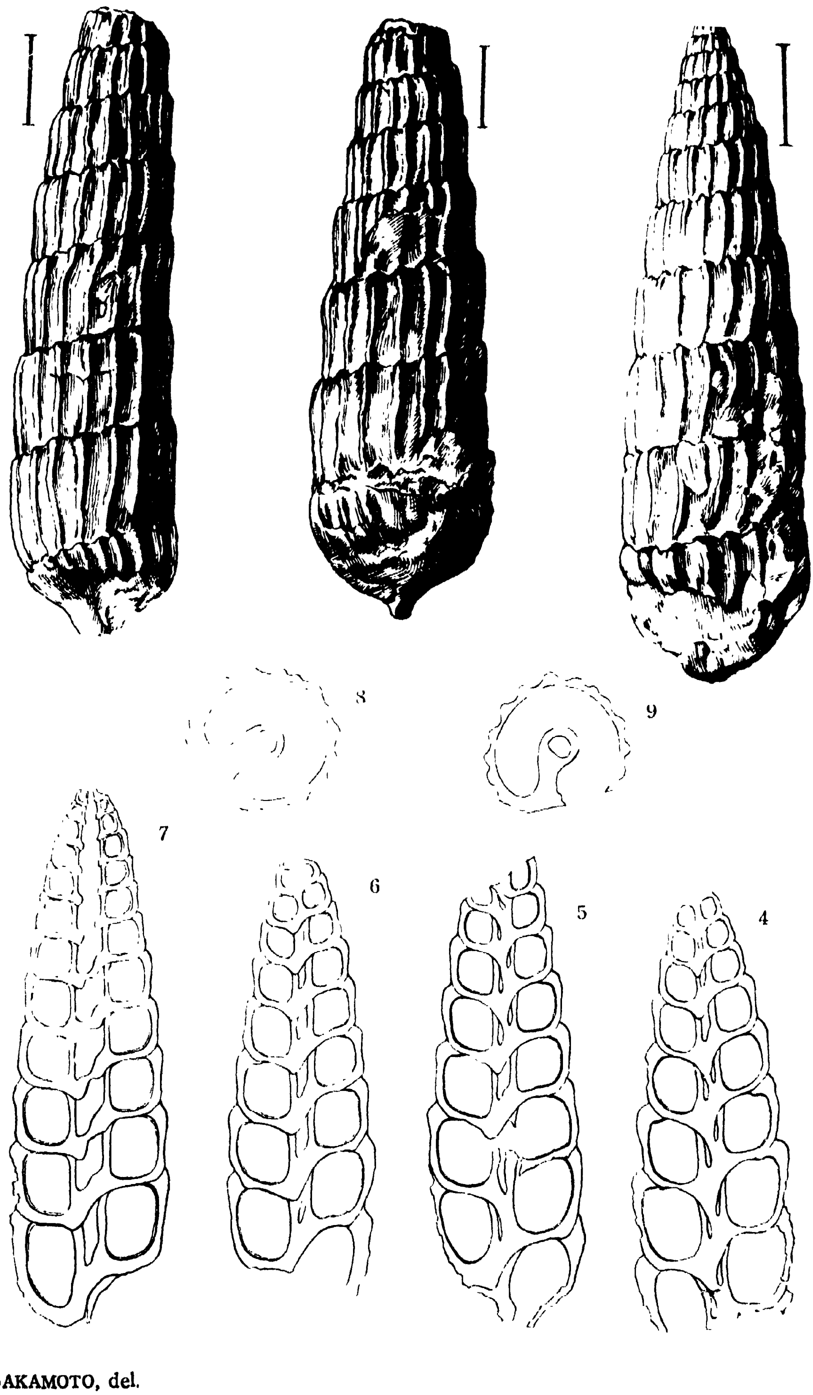
(All figures, sketched by Mr. SAKAMOTO, are magnified.)

Figs. 1–3. Relatively well preserved specimens, showing the many-whorled, highly-spired shells ornamented with almost vertical radial or transverse costae: early volutions are not preserved and the mouth is not well represented.

Figs. 4–7. Longitudinal sections cutting almost through the center of the cylindrical and spirally ridged or shelfed umbilicus (4 and 5) and those that are not strictly central (6 and 7): fig. 7 seems to show that the spiral ridge is "orimental" (Abel)[1] in early volutions: in figs. 4 and 5 the longitudinal section of the spiral shelf is very distinctly represented.

Figs. 8 and 9. Two transverse sections, both showing the cut-edge of the spiral shelf: the umbilicus is markedly narrowed by the extension of the spiral shelf.

1) O. ABEL:—"Orimente und Rudimente." Mitteil. d. Naturwiss. Vereines an d. Universität Wien, XII Jahrg., Nr. 4-6, p. 79–82, 1914.




SAKAMOTO, del.

昭和十四年三月十二日印刷
昭和十四年三月十五日發行

編纂兼發行者　臺北帝國大學理農學部

印刷者　顏川　晉
臺北市大正町二ノ三七

印刷所　株式會社臺灣日日新報社
臺北市榮町四ノ三二

購買申込所　株式會社臺灣日日新報社
臺北市榮町四ノ三二

同　丸善株式會社
東京市日本橋區通二丁目

# MEMOIRS OF THE FACULTY OF SCIENCE AND AGRICULTURE
## RECENT ISSUES